ریاضی عمومی (۲)

فصل اول: بردارها - ضرب داخلی و ضرب خارجی

تعریف ۱. (کمیت های اسکالر): به هر کمیتی که فقط دارای اندازه باشد کمیت اسکالر گویند. مانند جرم، طول، حجم، چگالی و غیره...

تعریف ۲. (کمیت برداری): به هر کمیتی که دارای اندازه و جهت باشد، کمیت برداری گویند مانند سرعت، شتاب و نیرو و غیره.

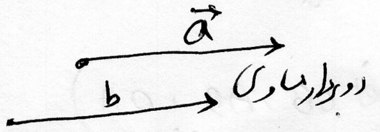
تعریف ۳. بردار واحد: برداری که اندازه آن یک باشد را بردار واحد گویند یعنی اگر $|\vec{op}|=1$ آنگاه بردار $\vec{op}$ را بردار واحد گویند.

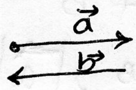
اگر $\hat{a}$ نمایانگر بردار واحد در جهت بردار $\vec{a}$ باشد و $|\vec{a}|$ اندازه بردار $\vec{a}$ باشد آنگاه

$$\text{بردار واحد} = \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = |\vec{a}|\cdot\hat{a}$$

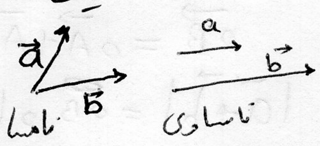
تعریف ۴. بردار صفر: برداری که اندازه آن صفر باشد. بردار صفر در واقع برداری است که ابتدا و انتهای آن یکی است و با نماد $\vec{o}$ نشان داده میشود.

تعریف ۵. دو بردار مساوی: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را مساوی گویند هرگاه اندازه و جهت یکسان داشته باشند (بدون توجه به نقاط شروع آنها)

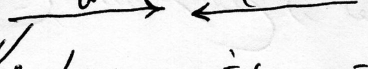




مساوی نیستند



تعریف ۶: بردار قرینه: قرینه بردار $\vec{a}$، برداری است که اندازه آن برابر بردار $\vec{a}$ و جهت آن مخالف بردار $\vec{a}$ است. (البته باید موازی باشند)



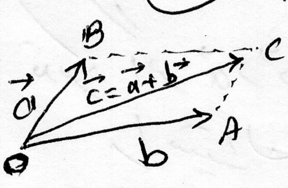
تعریف ۷: بردار مکانی: هر برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد، بردار مکانی گویند.

تعریف ۸: جمع بردارها:

$$\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}$$

قانون مثلث در جمع بردارها: برداری که ابتدا $\vec{a}$ را به انتهای $\vec{b}$ وصل کند.

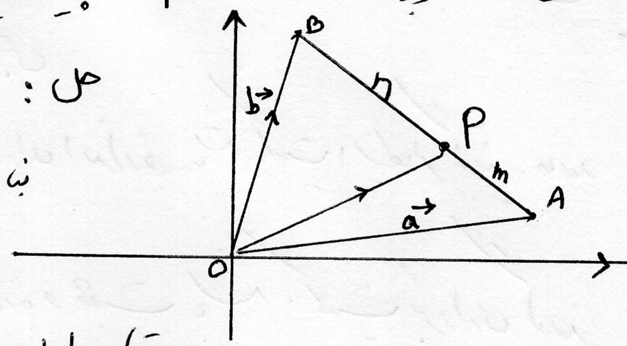
قانون متوازی الاضلاع: قطر بزرگ متوازی الاضلاعی که توسط بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از نقطه‌ای مانند O شروع میشوند.



تعریف ۹: تفاضل دو بردار: مجموع $\vec{a}$ و قرینه $\vec{b}$ را تفاضل دو بردار a و b گویند

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

مثال ۱- بردار مکانی نقطه P را پیدا کنید در صورتیکه P خط AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ قطع کند.



حل:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n} \to nAP=mPB$$

بنابراین:

$$n\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{PB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP} \quad , \quad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} \quad (2)$$

با قرار دادن (۲) در (۱) داریم

$$n(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=m(OB-OP) \to n\cdot\overrightarrow{OP}-n\cdot\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}-m\cdot\overrightarrow{OP}$$

جواب:

$$(m+n)\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}}{m+n}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

تذکر: اگر $m=n$ باشد داریم $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ (یعنی P وسط AB باشد)

تمرین: ثابت کنید مجموع سه بردار میانه‌ی اضلاع یک مثلث، صفر می‌باشد

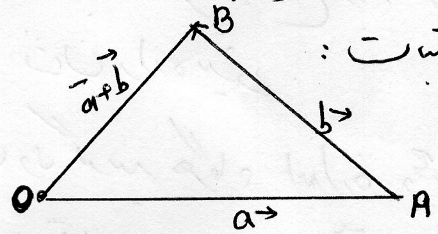
مثال) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید

$$\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

و

$$|\vec{a}-\vec{b}| \ge |\vec{a}|-|\vec{b}|$$

اثبات:



حل: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$$

(OA، AB، OB اضلاع مثلث $O\hat{A}B$ هستند) $|\vec{a}|=OA$ و $|\vec{b}|=AB$ و $|\vec{a}+\vec{b}|=OB$

در مثلث اندازه‌ی هر ضلع از مجموع اندازه‌ی دو ضلع دیگر بیشتر نیست

داریم $OB \le OA+AB$

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}| \quad (1)$$

همچنین اندازه هر ضلع از تفاضل اندازه‌ی دو ضلع دیگر کمتر نیست

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB} \le OB \longrightarrow |\vec{a}|-|\vec{b}| \le |\vec{a}+\vec{b}| \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$|\vec{a}|-|\vec{b}| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

همچنین تفاضل دو ضلع نمی‌تواند از ضلع سوم بزرگتر باشد

$$\boxed{|\vec{a}-\vec{b}| \ge |\vec{a}|-|\vec{b}|}$$

تذکر: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه، هر برداری مانند $\vec{r}$ را می‌توان به طور منحصر بفردی به صورت زیر نوشت

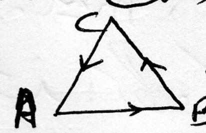
$$\vec{r}=L\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$$

(L, n, m اعداد حقیقی هستند)

نتیجه: هرگاه $P(x, y, z)$ نقطه‌ای در فضای ۳ بعدی و $\vec{OP}$ بردار مکان نقطه P باشد و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به ترتیب بردارهای واحد در راستای محور xها و yها و zها باشند داریم

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

مثال) اگر در مثلث ABC، $\vec{AB} = 3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{AC} = 2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ باشد $\vec{BC}$ را بیابید



در مثلث داریم

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$$

$$\vec{BC} = -\vec{AB} - \vec{CA} = -(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) + (2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})$$

$\vec{AC} = -\vec{CA}$ (قرینه)

$$\vec{BC} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

مثال) بردار واحد موازی حاصل جمع دو بردار $(4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})$ و $(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$ را پیدا کنید

$$\vec{r} = (4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}) + (2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) = 6\vec{i}+\vec{k}$$

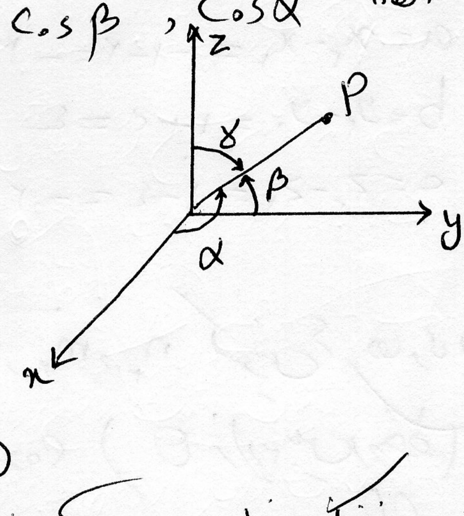
$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{6\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{6\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{37}}$$ (بردار واحد e)

توجه: اندازه بردار $\vec{a} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

کسینوس های هادی یک خط:

فرض کنید خط راست OP با محورهای مختصات به ترتیب زوایای α، β و γ بسازد آنگاه $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس های هادی OP گویند



$$l = \cos\alpha \quad , \quad m = \cos\beta \quad , \quad n = \cos\gamma$$

نتایج: ① کسینوس هادی محور xها $(1,0,0)$ و
" " محور yها $(0,1,0)$
" " محور zها $(0,0,1)$

② $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

مثال) فرض کنید خط OP با محور xها زاویه 120° و با محور yها زاویه 60° بسازد این خط با محور zها چه زاویه‌ای می‌سازد؟ حل داریم:

$$\cos^2 120 + \cos^2 60 + \cos^2\gamma = 1$$

$$(-\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2 + \cos^2\gamma = 1 \longrightarrow \cos^2\gamma = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \longrightarrow \cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه $\gamma = 135^\circ$ یا $\gamma = 45^\circ$

تمرین: ثابت کنید $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ (α و β و γ کسینوس های هادی خط OP هستند)

نکته: اگر کسینوس های هادی یک خط متناسب با سه عدد a و b و c باشند یعنی $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=(k)$ آنگاه a، b، c را نسبت های هادی خط گویند

$l=\cos\alpha\ ,\ m=\cos\beta\ ,\ n=\cos\gamma$

نکته: اگر a و b و c نسبت های هادی یک خط باشند آنگاه کسینوس های هادی خط عبارتند از

$$\cos\alpha=l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\qquad \cos\beta=m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ,\ \cos\gamma=n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

نکته: نسبت های هادی خطی که از دو نقطه $P(x_1,y_1,z_1)$ و $Q(x_2,y_2,z_2)$ می گذرد

$$l=\frac{x_2-x_1}{r}\ ,\ m=\frac{y_2-y_1}{r}\qquad n=\frac{z_2-z_1}{r}$$

که $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

داریم $\begin{cases} l=\cos\alpha \\ m=\cos\beta \\ n=\cos\gamma \end{cases}$

مثال) اگر $A(2,-3,4)$ و $B(-1,1,2)$ دو نقطه باشند مطلوبست محاسبه نسبت های هادی و کسینوس های هادی خط AB:

نسبتهای هادی $\begin{cases} a=x_2-x_1=-1-2=-3 \\ b=y_2-y_1=1+3=4 \\ c=z_2-z_1=2-4=-2 \end{cases}$

$$l=\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2+(-2)^2}}$$

$$l=\frac{-3}{\sqrt{29}}\ ,\ m=\frac{4}{\sqrt{29}}\ ,\ n=\frac{-2}{\sqrt{29}}$$

زاویه بین دو خط: اگر l_1 و m_1 و n_1 و l_2 و m_2 و n_2 کسینوس های هادی دو خط باشند آنگاه

$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$ (θ زاویه بین دو خط)

نتیجه ۱: شرط عمود بودن دو خط:

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

شرط موازی بودن دو خط:

$l_1=l_2\ ,\ m_1=m_2\ ,\ n_1=n_2$

نتیجه ۲: دو خطی که دارای نسبت های هادی a و b و c و a'، b'، c' باشند

$$\cos\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

نتیجه ۳: شرط اینکه دو خط دارای بردارهای هادی a ، b ، c و a' ، b' ، c'

الف) بر هم عمود باشند آن است که

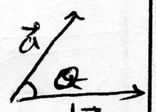
$$\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$$

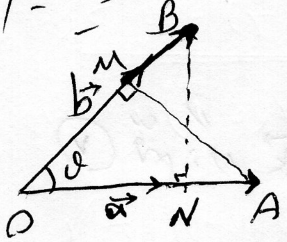
ب) با هم موازی باشند آن است که

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=(\lambda)$$

ضرب بردارها:

تعریف: ضرب داخلی یا اسکالر دو بردار: ضرب داخلی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ را به صورت $\vec a\cdot\vec b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$ ، $0\leq\theta\leq\pi$ که در آن θ زاویه بین $\vec a$ و $\vec b$ است تعریف می‌کنیم





توجه: فرض کنید $\vec{OB}=\vec b$ ، $\vec{OA}=\vec a$ ، $|\vec b|=b$ و $|\vec a|=a$

طبق شکل OM را تصویر بردار $\vec a$ در جهت بردار $\vec b$

و ON را تصویر بردار $\vec b$ در جهت بردار $\vec a$ گویند

از مثلث OAM داریم:

$OM=$ تصویر بردار $\vec a$ در جهت بردار $\vec b$ $=OA\cdot\cos\theta$

$=a\cdot\cos\theta$

از مثلث OBN داریم:

$ON=$ تصویر بردار $\vec b$ در جهت بردار $\vec a$ $=OB\cdot\cos\theta=b\cos\theta$

طبق ضرب داخلی داریم

$\vec a\cdot\vec b=ab\cdot\cos\theta=a(b\cos\theta)$

$\vec a\cdot\vec b=ab\cos\theta=b(a\cos\theta)\Rightarrow$ تصویر بردار $\vec a$ روی $\vec b$ $=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{b}=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|b|^2}\cdot\vec b$

خواص ضرب داخلی:

1) اگر $\vec a$ و $\vec b$ موازی باشند و هم جهت $(\theta=0)$ — $\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|$

2) اگر $\vec a$ و $\vec b$ موازی و غیر هم جهت $(\theta=\pi)$ — $\vec a\cdot\vec b=-|\vec a|\cdot|\vec b|$

3) اگر $\vec a$ و $\vec b$ عمود باشند $(\theta=\frac{\pi}{2})$ — $\vec a\cdot\vec b=0$

4) اگر a و b بردارهای واحد باشند $(|a|=|b|=1)$ داریم — $\vec a\cdot\vec b=\cos\theta$

5) اگر a و b بردارهای مساوی باشند و $\vec a=\vec b\neq 0$ آنگاه $\theta=0$ و

$\vec a\cdot\vec a=(\vec a)^2=a^2$

بعضی از خواص جبری ضرب داخلی :

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2) $\vec{a}\cdot(n\vec{b})=n\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4) $\vec{a}\cdot(-\vec{b})=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$ توجه ، $a=|\vec{a}|$ اندازه بردار $\vec{a}$

5) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2+b^2$ 6) $(\vec{a}+\vec{b})^2=a^2+2ab+b^2$

6) ضرب داخلی بردارهای واحد $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$

$\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$ ، $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

7) قضیه: اگر $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ و $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ الف: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

مثال) تصویر بردار $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ را روی بردار $\vec{b}=4\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$ بیابید.

$$\text{تصویر بردار } \vec{a} \text{ روی } \vec{b}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^2}\right)\vec{b}=\frac{(i-2j+k)\cdot(4i-4j+7k)}{\left(\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}\right)^2}\cdot(4\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})$$

$$=\frac{4+8+7}{(\sqrt{81})^2}(4\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})=\frac{19}{81}(4\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})=\frac{76}{81}\vec{i}-\frac{76}{81}\vec{j}+\frac{133}{81}\vec{k}$$

اندازه تصویر بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ برابر است با:

$$\dots=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|}=\frac{19}{9}$$

مثال) اگر $P(2,3,-6)$ ، $Q(3,-4,5)$. زاویه بین $\vec{OP}$ ، $\vec{OQ}$ را بیابید (O مبدا مختصات)

$\vec{OP}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}\to|\vec{OP}|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7$ $\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=(2i+3j-6k)\cdot(3i-4j+5k)=6-12-30=-36$

$\vec{OQ}=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}\to|\vec{OQ}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta\to\cos\theta=\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{|\vec{OP}|\cdot|\vec{OQ}|}=\frac{(7)(5\sqrt{2})}{7\times5\sqrt{2}}=\frac{-36}{35\sqrt{2}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-36}{35\sqrt{2}}\right)$$

مثال) اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ثابت کنید زاویه بین a و b برابر $\pi/2$ است

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2+2\vec{a}\vec{b}+b^2=a^2-2\vec{a}\vec{b}+b^2 \Rightarrow 4\vec{a}\vec{b}=0$$

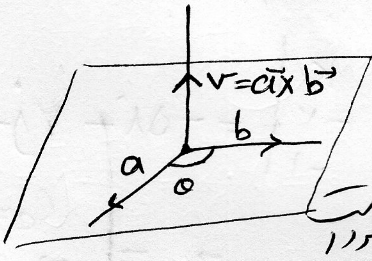
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \text{ (۱)}$$

داریم (۲) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=0$ $\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$ $\leftarrow$

ضرب خارجی دو بردار:

تعریف) ضرب خارجی بردار $\vec{a}$ در بردار $\vec{b}$ را با $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش میدهیم و تعریف میکنیم

$$\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}=(|a||b|\sin\theta)$$



نکته: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر صفحه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است

نکته

$0\leq\theta\leq2\pi$

نتیجه: $\vec{a}\times\vec{b}$ عمود بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و همچنین اندازه آن برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که اضلاع آن در راستای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است

خواص ضرب خارجی دو بردار:

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند $\theta=0$ پس

$$\vec{a}\times\vec{b}=|a||b|\sin 0=0$$

۲) اگر دو بردار عمود بر هم باشند $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{2}=1$ و

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$$

۳) ضرب خارجی دو بردار واحد: $|\vec{a}|=1$ ، $|\vec{b}|=1$ داریم

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sin\theta$$

۴) ضرب خارجی بردارهای واحد $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \quad , \quad \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

۵) $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ ، ۶) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

۷) $m(\vec{a}\times\vec{b})=(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})$

۸) $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ ، $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}$

۹) $a\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

بیان ضرب خارجی دو بردار :

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال) بردار واحد عمود بر صفحه شامل دو بردار زیر را بیابید.

$$\vec a = \vec i + 3\vec j - 2\vec k \quad , \quad \vec b = 2\vec i - \vec j - \vec k$$

حل: ابتدا بردار $\vec c = \vec a \times \vec b$ را که عمود بر صفحه دو بردار است پیدا می‌کنیم

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5i - 3j - 7k$$

بردار واحد عبارت است از : $e_c = \frac{\vec c}{|c|}$

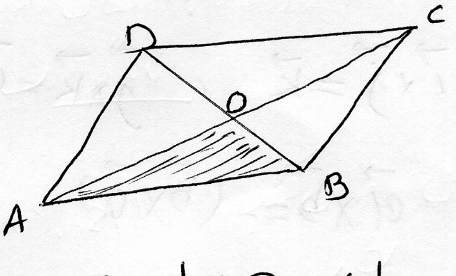
$$e_c = \frac{\vec c}{|c|} = \frac{-5i - 3j - 7k}{\sqrt{5^2 + (3)^2 + 7^2}} = \frac{(5\vec i - 3\vec j - 7\vec k)}{\sqrt{83}}$$

مثال) مساحت متوازی الاضلاعی که بوسیله بردارهای $\vec b = -3\vec i - 3\vec j + \vec k$ ، $\vec a = \vec i - 2\vec j + 3\vec k$ ایجاد می‌شود را محاسبه کنید

$$S = |\vec a \times \vec b| \quad , \quad \vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec i - 10\vec j + 4\vec k$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + (4)^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$$

مثال) مساحت متوازی الاضلاعی که دارای اقطار $\vec b = \vec i - 3\vec j + 4\vec k$ ، $\vec a = 3\vec i + \vec j - 2\vec k$ هستند را بیابید.



$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = 4(\text{مساحت مثلث } O\hat{A}B)$$

$$= 4\left|\tfrac{1}{2}\, \vec{OA} \times \vec{OB}\right|$$

$$= 4 \times \tfrac{1}{2}\left|(\tfrac{1}{2}\vec{AC}) \times (\tfrac{1}{2}\vec{BD})\right|$$

داریم $OA = \frac{1}{2}AC$ و $OB = \frac{1}{2}BD$

$$= \tfrac{1}{2}\left|(3\vec i + \vec j - 2\vec k) \times (\vec i - 3\vec j + 4\vec k)\right| = \cancel{\ldots} = 5\sqrt{3}$$

ضرب اسکالر سه بردار : فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر باشند آنگاه $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ را ضرب اسکالر سه بردار گویند

نکته (۱) :

۱) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

۲) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

۳) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ معروف به ضرب جعبه‌ای است

۴) $[\vec{i}\vec{j}\vec{k}] = \vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{i}^2 = 1$

۵) شرط آنکه سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ غیر موازی در یک صفحه باشند آنست که ضرب اسکالری آنها صفر باشد $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$

۶ـ ضرب اسکالر سه بردار به فرم دترمینان

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

۷) اگر سه بردار با هم مساوی و موازی باشند آنگاه ضرب اسکالر آنها صفر است

مثال) مطلوبست محاسبه

$$T = \vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k}) + (\vec{i}\times\vec{k})\cdot\vec{j}$$

$$T = \vec{i}\cdot\vec{i} + (-\vec{j})\cdot\vec{j} = \vec{i}^2 - \vec{j}^2 = 1-1 = 0 \qquad \text{توجه}\ |\vec{i}^2| = \vec{i}^2 = 1$$

مثال : حجم مکعب دارای اضلاع $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ، $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ، $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ را حساب کنید

$$\text{حجم}\ V = |(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}| \quad , \quad \vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k})\cdot(3\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}) = 6 + 15 - 28 = -7$$

$$V = |-7| = 7 \quad \text{حجم مکعب}$$

تمرینات: اگر $\vec a = 2\vec i + 3\vec j + 4\vec k$ و $\vec b = \vec i + \vec j - \vec k$ و $\vec c = \vec i - \vec j + \vec k$

(۱) سه بردار باشند بردار $\vec d = \vec a \times (\vec b \times \vec c)$ را پیدا کنید و سپس نشان دهید که $\vec d$ عمود بر $\vec a$ و عمود بر $(\vec b \times \vec c)$ است.

(۲) بردار واحد موازی مجموع دو بردار $2\vec i + 4\vec j - 5\vec k$ و $\vec i + 2\vec j + 3\vec k$ پیدا کنید.

(۳) اگر بردارهای مکان نقاط A و B به ترتیب $\vec i + 3\vec j - 7\vec k$ و $5\vec i - 2\vec j + 4\vec k$ باشد بردار $\vec{AB}$ را پیدا کنید. کسینوس های هادی آن و اندازه بردار $\vec{AB}$ را بیابید.

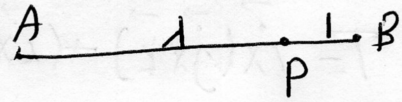
(۴) نشان دهید که مثلث با رئوس $2\vec i + 4\vec j - \vec k$ و $4\vec i + 4\vec j + \vec k$ و $3\vec i + 6\vec j - 3\vec k$ یک مثلث متساوی الساقین است.

«فصل دوم: معادلات خط و صفحه در فضا»

صفحه: یک صفحه سطحی است که اگر هر دو نقطه از آن را توسط خطی به هم وصل کنیم کل خط روی سطح قرار گیرد.

توجه: فرض کنید که $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه و P یک نقطه دلخواه روی خط AB باشد که خط AB را به نسبت $1:\lambda$ قطع کند بنابراین مختصات P به صورت زیر است:

$$P\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$



معادله صفحه در فضا: نشان دهید که معادله درجه اول برحسب x و y و z به فرم زیر، همیشه نمایانگر یک صفحه است.

$$ax+by+cz+d=0 \quad (1)$$

(a، b، c، d اعداد حقیقی)

حل: فرض کنید $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه روی صفحه ای به معادله (۱) باشند پس مختصات آنها در معادله صفحه صدق می کند

$$\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 & (2) \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 & (3) \end{cases} \longrightarrow (2)+\lambda(3)=0 \longrightarrow$$

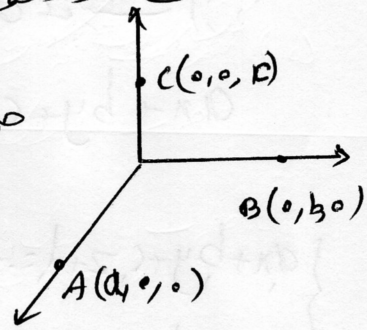
$$ax_1+by_1+cz_1+d+\lambda(ax_2+by_2+cz_2+d)=0 \longrightarrow$$

$$a(x_1+\lambda x_2)+b(y_1+\lambda y_2)+c(z_1+\lambda z_2)+d(1+\lambda)=0 \longrightarrow$$

با تقسیم طرفین بر $(\lambda+1)$ داریم: $a\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+b\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+c\left(\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)+d=0$

و این نشان می‌دهد که نقطه C به مختصات $C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$ روی صفحه به معادله $ax+by+cz+d=0$ قرار دارد. معادله بالا نمایشگر موقعیت‌های مختلف روی خطی است که نقاط A، B، C را به هم وصل می‌کند پس تمامی نقاط روی AB روی صفحه به معادله $ax+by+cz+d=0$ قرار دارند پس کل خط AB در معادله ① قرار دارد پس معادله ① معادله یک صفحه است.

مثال) نشان دهید صفحه‌ای که محورهای x، y، z را به ترتیب در نقاط A، B، C قطع کند و طول نقاط تلاقی a، b، c باشد عبارتست از: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



حل: فرض کنید معادله صفحه $a'x+b'y+c'z+d'=0$ باشد بنابراین مختصات نقاط تلاقی یعنی $A(a,0,0)$، $B(0,b,0)$، $C(0,0,c)$ در آن صدق می‌کند.

$aa'+b'(0)+c'(0)+d'=0 \to a'=\frac{-d'}{a}$

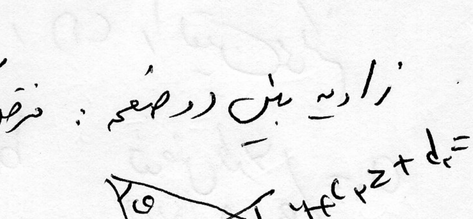
$a'(0)+bb'+c'(0)+d'=0 \to b'=\frac{-d'}{b}$ ⟹ در معادله صفحه قرار می‌دهیم ⟹

$a'(0)+b'(0)+c'c+d'=0 \to c'=-\frac{d'}{c}$

$-\frac{d'}{a}x-\frac{d'}{b}y-\frac{d'}{c}z+d'=0 \xrightarrow{\text{با تقسیم بر } d'} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

زاویه بین دو صفحه: فرض کنید معادلات دو صفحه به صورت زیر باشند:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$$



توجه

(a_2,b_2,c_2) و (a_1,b_1,c_1) را نرمال‌های دو صفحه گویند.

کسینوس زاویه بین دو صفحه:

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

نتیجه ۱: دو صفحه وقتی برهم عمودند که: نرمال های آن برهم عمود باشند

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

نتیجه ۲: دو صفحه وقتی با هم موازی اند که: نرمال های آن با هم موازی باشند:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

نکته: طول عمود از نقطه $P(x_1,y_1,z_1)$ بر صفحه $ax+by+cz+d=0$ عبارت است از:

$$PQ=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ (یا فاصله نقطه از صفحه)

نکته: معادله هر صفحه موازی با صفحه $ax+by+cz+d=0$ عبارت است از:

$$ax+by+cz+K=0$$

نکته: معادله هر صفحه که از فصل مشترک دو صفحه به معادلات

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

می گذرد عبارت است از:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

مثال) اگر $A(2,3,1)$ ، $B(3,-1,2)$ ، $C(1,-1,3)$ ، $D(4,2,-3)$ چهار نقطه باشند مطلوبست محاسبه زاویه بین خطوط AB ، CD

حل: ابتدا نسبت های هادی و کسینوسهای هادی دو خط AB ، CD را تعیین می کنیم

نسبت های هادی AB:

$a_1=$ تفاضل طول دو نقطه B ، A $b_1=$ تفاضل عرض دو نقطه B ، A $c_1=$ تفاضل ارتفاع دو نقطه B ، A

$a_1=3-2=1 \quad b_1=-1-3=-4 \quad c_1=2-1=1$ نسبت های هادی AB

$L_1=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$ ، $L_1=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{18}}$ کسینوس های هادی AB

$m_1=\frac{-4}{\sqrt{18}}$ ، $n_1=\frac{1}{\sqrt{18}}$

نسبت های هادی CD:

$a_2=4-1=3 \quad b_2=2+1=3 \quad c_2=-3-3=-6$

کسینوس های هادی CD:

$L_2=\frac{3}{\sqrt{54}} \quad m_2=\frac{3}{\sqrt{54}} \quad n_2=\frac{-6}{\sqrt{54}} \Rightarrow \cos\theta=L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=\frac{-\sqrt{3}}{6}$

مثال) معادله صفحه موازی با صفحه $3x+2y-z+5=0$ را که از نقطه $I(2,2,-2)$ می‌گذرد بنویسید.

حل: معادله صفحه مورد نظر $3x+2y-z+k=0$ است چون این صفحه از نقطه I می‌گذرد پس مختصات I در آن صدق می‌کند.

$$3(2)+2(2)+2+k=0 \longrightarrow \boxed{k=-12} \Longrightarrow 3x+2y-z-12=0$$

تمرینات: دو دستگاه دکارتی دارای مبدا مشترک است. اگر صفحه‌ای، آن دو صفحه را به فاصله‌ی a, b, c و a_1, b_1, c_1 از مبدأ مختصات قطع کند نشان دهید که:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}$$

حل: چون صفحات محورهای مختصات را قطع می‌کند پس معادلات آن‌ها به شرح زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \\[2mm] \dfrac{x}{a_1}+\dfrac{y}{b_1}+\dfrac{z}{c_1}=1 \end{cases}$$

چون معادلات در دو نمایانگر یک صفحه‌اند پس فاصله مبدا از هر دو صفحه فوق یکسان است.

$$\frac{1}{\sqrt{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}}=\frac{1}{\sqrt{a_1^{-2}+b_1^{-2}+c_1^{-2}}} \xRightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}=\frac{1}{a_1^{-2}+b_1^{-2}+c_1^{-2}}$$

$$a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}=a_1^{-2}+b_1^{-2}+c_1^{-2} \longrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}$$

مثال) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $(3,-3,1)$ گذشته و

الف) عمود بر خطی باشد که نقاط $(3,2,-1)$ و $(2,-1,5)$ را به هم متصل می‌کند

ب) عمود بر صفحات $7x+y+2z=6$ و $3x+5y-6z=8$ باشد

حل: معادله صفحه گذرنده از نقطه‌ی $(3,-3,1)$ عبارت است از

$$a(x-3)+b(y+3)+c(z-1)=0 \quad (1)$$

کسینوس‌های هادی هر خط گذرنده از نقاط $(3,2,-1)$ و $(2,-1,5)$ عبارت است از

$3-2=1$, $2-(-1)=3$, $-1-5=-6$

(ادامه در صفحه بعد)

چون خط عمود بر صفحه است پس a, b, c متناسب با : $(3, 1, -6)$
که با قرار دادن در معادله ۱ داریم

$$1(x-3)+3(y+2)-6(z-1)=0$$

$$\boxed{x+3y-6z+12=0}$$

ب) معادله گذرنده از نقطه $(3,-3,1)$ عبارت است از

$$a(x-3)+b(y+3)+c(z-1)=0$$

چون این صفحه عمود بر $2x+y+2z=6$ است پس
و عمود بر $3x+5y-6z=8$ است

از حل دستگاه داریم
$$\begin{cases} 2a+b+2c=6 \\ 3a+5b-6c=8 \end{cases}$$

یعنی $\frac{a}{1}=\frac{b}{-2}=\frac{c}{-2}=k$ ، $a=k$ ، $b=-2k$ ، $c=-2k$ در نتیجه معادله مورد نظر

$$1(x-3)-2(y+3)-2(z-1)=0 \qquad x-2y-2z-10=0$$

نکته: اگر p طول عمود از مبدا بر صفحه و a, b, c نسبت های هادی op و l, m, n کسینوس‌های هادی خط op باشند آنگاه معادله صفحه گذرنده از نقطه p و عمود بر op عبارت است از

$$\boxed{lx+my+nz=p}$$

مثال: اگر o مبدا و $p(2,-3,4)$ باشد معادله صفحه گذرنده بر نقطه p و عمود بر op را بنویسید.

$$p=|op|=\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{29}$$

داریم $o(0,0,0)$ ، $p(2,-3,4)$ نسبت های هادی

$$a=2-0=2 \qquad b=-3-0=-3 \qquad c=4-0=4$$

$$l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{29}}, \quad m=\frac{-3}{\sqrt{29}} \quad n=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$lx+my+nz=p \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{29}}x-\frac{3}{\sqrt{29}}y+\frac{4}{\sqrt{29}}z=\sqrt{29} \Rightarrow \boxed{2x-3y+4z=29}$$

مثال: معادله صفحه را بنویسید که از نقطه $(3,-1,2)$ بگذرد و عمود بر خطی باشد که نسبت های هادی آن ۲، ۳، ۴ است.

حل: معادله صفحه $ax+by+cz+d=0$ که a, b, c نسبت های هادی آن می‌باشند پس

$$2x+3y+4z+d=0$$

چون صفحه مورد نظر از نقطه $(3,-1,2)$ می‌گذرد پس

$$2(3)+3(-1)+4(2)+d=0$$

در نتیجه $d=-6$ معادله صفحه

$$2x+3y+4z-6=0$$

است.

مثال) معادله صفحه ای را بیابید که از سه نقطه $(2,2,-1)$ ، $(-1,1,2)$ و $(0,1,3)$ بگذرد.

حل. معادله کلی صفحه $ax+by+cz+d=0$ یا $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ است.
مختصات نقاط را در معادله صفحه قرار می دهیم.

$$a(x-2)+b(y-2)+c(z+1)=0 \quad (1) \leftarrow (2,2,-1)$$

چون صفحه از دو نقطه دیگر عبور می کند (روی صفحه واقع می شوند) مختصات آنها در معادله (1) صدق می کند.

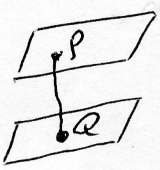
$$a(-1-1)+b(1-2)+c(2+1)=0 \longrightarrow \boxed{-3a-b+3c=0} \quad (2)$$

$$a(0-2)+b(1-2)+c(3+1)=0 \longrightarrow \boxed{-2a-b+4c=0} \quad (3)$$

با حذف a, b, c از روابط (1)، (2) و (3) با قرار دادن دترمینان ضرایب مساوی صفر معادله صفحه مورد نظر بدست می آید.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{x-6y-z+1=0}$$

مثال) فاصله بین دو صفحه موازی $2x-2y+z+3=0$ و $4x-4y+2z+5=0$ را بیابید.



نقطه دلخواهی مانند $P(0,0,3)$ روی صفحه $2x-2y+z+3=0$ را در نظر بگیرید.
از P عمود PQ را بر صفحه دوم $4x-4y+2z+5=0$ رسم می کنیم.
بنابراین فاصله نقطه P از نقطه Q همان فاصله بین دو صفحه است:

$$PQ=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{4(0)+(-4)(0)+2(-3)+5}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}}=\frac{-1}{6}\Rightarrow \boxed{PQ=\frac{1}{6}}$$

مثال) معادله صفحه ای را بیابید که از فصل مشترک دو صفحه $2x-y+3z-4=0$ و $x+y+z+2=0$ و نقطه $(2,-1,3)$ بگذرد.

حل: معادله صفحه مورد نظر $(2x-y+3z-4)+\lambda(x+y+z+2)=0 \quad (1)$ است.
چون نقطه $(2,-1,3)$ روی آن قرار دارد پس:

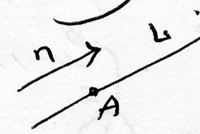
$$(4+1+9-4)+\lambda(2-1+3+2)=0 \longrightarrow \lambda=-\frac{4}{3}$$

با قرار دادن λ در (1) داریم:

$$\boxed{2x-y+5z-20=0}$$

خط راست: فرض کنید $A(x_1,y_1,z_1)$ یک نقطه دلخواه از خط ما باشد و $\vec{n}(a,b,c)$ بردار موازی آن خط. در اینصورت معادله خط ما به صورت است

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$ (فرم متقارن معادله خط)



مثال) معادله خط گذرنده از نقاط $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را بنویسید.

$a=x_2-x_1 \quad b=y_2-y_1 \quad c=z_2-z_1$

$$\Rightarrow L: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

مثال) فرم متقارن معادله خط را بنویسید که:
$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 4x+y-2z+2=0 \end{cases}$$

حل: معادلات فوق، معادلات دو صفحه اند که یکدیگر را قطع می کنند (فصل مشترک)
ابتدا یک نقطه دلخواه روی فصل مشترک پیدا می کنیم

با فرض $z=0$ در حل $\begin{cases} x+y=-1 \\ 4x+y=-2 \end{cases}$ ، $x=-\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{2}{3}$ حاصل می شود پس $A(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0)$ روی فصل مشترک هستند

بردار $n_1(1,1,1)$ و $n_2(4,1,-2)$ بردار نرمال دو صفحه اند که بردار $n_1\times n_2$ بردار عمود بر فصل مشترک می باشد که بردار خط مورد نظر است.

$$n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$$

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{-3}=\frac{y+\frac{2}{3}}{6}=\frac{z}{-3}\Longrightarrow \frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-2}=\frac{z}{1}$$ معادله خط

نکته مهم: برای نوشتن معادله یک صفحه نیاز به یک نقطه روی صفحه و یک بردار عمود بر آن داریم $A(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

و برای نوشتن معادله خط نیاز به یک نقطه روی خط و یک بردار موازی با آن داریم: $A(x_1,y_1,z_1)$ روی خط و $\vec{n}(a,b,c)$ بردار موازی با خط

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

مثال) نقطه برخورد خط $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+6}{4}$ را با صفحه $2x+4y-z-2=0$ بیابید.

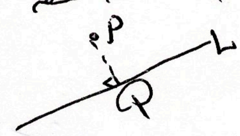
حل:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+6}{4}=k \longrightarrow x=2k+2,\quad y=-3k+4,\quad z=4k+6$$

این مقادیر را در معادله صفحه قرار دهید $(2k+2, -3k+4, 4k+6)$

$$2(2k+2)+4(-3k+4)-(4k+6)-2=0 \longrightarrow \boxed{k=2} \Rightarrow (6,-2,2)$$ نقطه برخورد

مثال) فاصله نقطه $P(3,9,-1)$ را تا خط به معادله $\frac{x+8}{-8}=\frac{y-31}{1}=\frac{z-13}{5}$ حساب کنید.



حل: فرض کنید نقطه Q پای عمود از P بر خط L باشد

$$\frac{x+8}{-8}=\frac{y-31}{1}=\frac{z-13}{5}=k \longrightarrow Q(x_1=-8k-8,\ y_1=k+31,\ z_1=5k+13)$$

$\vec{n}(-8,1,5)$ هادی خط L (بردار موازی خط)

بردار هادی معادله $\vec{PQ}$:

$$\vec{m}(x_1-3,\ y_1-9,\ z_1+1) \Rightarrow \vec{m}(-8k-11,\ k+22,\ 5k+14)$$

شرط عمود بودن دو بردار آنست که حاصلضرب داخلی آنها صفر باشد

$$\vec{n}\cdot\vec{m}=-8(-8k-11)+1(k+22)+5(5k+14)=0 \Rightarrow \boxed{k=-2}$$

$$Q(x_1,y_1,z_1)=(8,29,3) \Rightarrow PQ=\sqrt{(8-3)^2+(29-9)^2+(3+1)^2}=21$$

تمرین: تصویر نقطه $P(1,-2,3)$ را نسبت به صفحه $2x-3y+2z+3=0$ بیابید

تمرین: کسینوس های هادی خط به معادلات زیر را بیابید

$$\begin{cases} x-y+2z-6=0 \\ 3x+y+z-6=0 \end{cases}$$

راهنمایی: خط مورد نظر همان فصل مشترک دو صفحه است

نکته: شرط آنکه خط $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ با صفحه $ax+by+cz+d=0$ موازی باشد آنست که: ضرب داخلی بردار هادی خط و نرمال صفحه صفر باشد

$$al+bm+cn=0$$

مثال) نشان دهید که خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$ موازی صفحه $x-2y-4z-7=0$ است.

$a=1\quad b=-2\quad c=-4$ نرمال صفحه

$(2,3,-1)$ هادی خط

$$(1)(2)+(-2)(3)+(-4)(-1)=0$$

تمرین) معادله صفحه‌ای را پیدا کنید که شامل خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{3}$ بوده و از نقطه $A(1,-2,3)$ نیز بگذرد.

تمرین) معادله صفحه‌ای را پیدا کنید که از خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{2}$ بگذرد و بر صفحه $2x-5y-3z+1=0$ عمود باشد.

تمرین) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-2,3,4)$ بگذرد و موازی با صفحات $2x+3y+4z=5$ و $3x+4y+5z=6$ باشد.

تمرین) معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه به معادلات $7x-4y+7z+16=0$ و $4x+3y-2z+13=0$ بگذرد و عمود بر صفحه $x-y-2z+5=0$ باشد.

شرط تقاطع دو خط: فرض کنید خطوط داده شده عبارت باشند از:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1} \\[2ex] \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \xrightarrow[\text{دو خط}]{\text{شرط تقاطع}} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$$

و معادله صفحه شامل دو خط:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

مثال) نشان دهید خطوط $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ و $\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-5}{6}$ متقاطع‌اند پس معادله صفحه شامل آنها را پیدا کنید.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \leftarrow \text{داریم} \rightarrow \text{دو خط متقاطع‌اند}$$

معادله صفحه شامل دو خط

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{x-2y+z=0}$$

«فصل سوم» «حد، پیوستگی، مشتقات جزئی و اکسترمم توابع چند متغیره»

فضای n بعدی: مجموعه تمام n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را فضای n بعدی نامیده می‌شود

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad i=1,2,\dots,n\}$$

نقاط فضای n بعدی R^n را با P نمایش می‌دهیم $P=(x_1, x_2, \dots, x_n)$

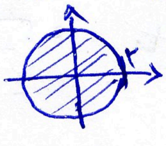
تعریف: تابع n متغیره تابعی است که به هر n تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از زیرمجموعه‌ای مانند D از R^n یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد. به عبارت دیگر یک تابع n متغیره، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت (P, W) است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای عضو اول یکسان نیست.

تعریف: بزرگترین زیرمجموعه R^n را که در هر نقطه از آن تابع $w=f(P)$ تعریف شده را دامنه تابع f نام دارد و آن را با D_f نمایش می‌دهیم و برد آن را با R_f.

$$R_f = \{f(P) \mid P \in D_f\}$$

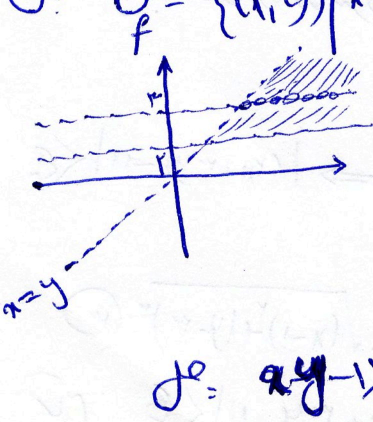
مثال) دامنه تابع $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ را بیابید

حل: $4-x^2-y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2+y^2 \leq 4 \longrightarrow D_f=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ که نمایش یک قرص است



مثال) دامنه تابع $f=\log_{y-2}^{x-y}$ را بیابید.

حل: $D_f=\{(x,y) \mid x-y>0 \text{ و } y-2>0 \text{ و } y-2 \neq 1\} = \{(x,y) \mid x>y ,\ y>2 ,\ y \neq 3\}$



تمام نقاط هاشورزده بجز نقاط روی خط $y=3$

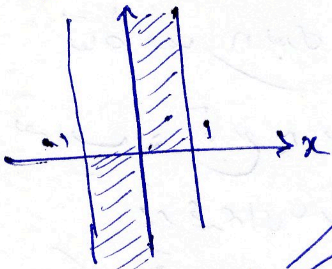
مثال) دامنه تابع $z=\ln(xy-1)$ را بیابید

حل: $xy-1>0 \quad xy>1 \Longrightarrow y<\frac{1}{x}$ یا $y>\frac{1}{x}$

مثال) دامنه تابع $h=\arccos x+\sqrt{xy}$ را رسم کنید:

حل: در $\arccos x$ داریم $-1\leq x\leq 1$ همچنین $xy\geq 0$ بنابراین

$$D_h=\{(x,y)\mid -1\leq x\leq 1\ ,\ xy\geq 0\}=\{(x,y)\mid -1\leq x\leq 1\ ,\ x\geq 0, y\geq 0 \text{ یا } x\leq 0, y\leq 0\}$$



تعریف: فاصله بین دو نقطه در فضای R^n

اگر $A(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $B(b_1,b_2,\dots,b_n)$ باشد

فاصله بین دو نقطه A و B را با نماد $\|A-B\|$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\|A-B\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\dots+(a_n-b_n)^2}$$

توجه: در فضای R^2 یک همسایگی نقطه $A(a_1,a_2)$ و شعاع ε مجموعه نقاطی است که درون دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ε قرار دارند. یعنی

$$N(A)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}<\varepsilon\}$$

تعریف: حد تابع (حد دوگانه یا دو متغیره) $z=f(x,y)$ وقتی که نقطه $P(x,y)$ به نقطه $P_0(x_0,y_0)$ میل کند عدد حقیقی L است هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ بطوریکه } 0<\|P-P_0\|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

که می‌نویسیم:

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=L \quad \text{یا} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L \quad \text{یا} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

توجه: از $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ نتیجه می‌گیریم که از هر مسیری که از نقطه $P(x,y)$ به نقطه $P_0(x_0,y_0)$ نزدیک می‌شود مقدار $f(P)$ باید به L نزدیک شود.

مثال) با استفاده از تعریف، حد تابع زیر را اثبات کنید:

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)}(2x+3y)=11$$

حل: نشان می‌دهیم $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta \Longrightarrow |(2x+3y)-11|<\varepsilon$

$$|2x+3y-11|=|2(x-1)+3(y-3)|\leq 2|x-1|+3|y-3| \quad (1)$$

$$|x-1|=\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta \quad (2) \qquad \text{و} \qquad |y-3|\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3)\longrightarrow |2x+3y-11|<5\delta \longrightarrow \varepsilon>0 \text{ واگر } \delta=\frac{\varepsilon}{5}\Longrightarrow |2x+3y-11|<\varepsilon$$

تمام

مثال) براساس تعریف حد، ثابت کنید
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2+y) = 5$$

حل: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \ \ni\ 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \to |3x^2+y-5|<\varepsilon$

$$|3x^2+y-5| = |3x^2-3+y-2| = |3(x^2-1)+(y-2)| = |3(x-1)(x+1)+(y-2)|<\varepsilon$$

اگر $\delta \leq 1$ در نظر بگیریم داریم

$$|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < 1 \to |x-1|<1 \to -1<x-1<1 \to 1<x+1<3$$

و
$|y-2| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$ به کمک روابط فوق داریم

$$|3x^2+y-5|<10\delta$$

درنتیجه برای هر $\varepsilon>0$ داده شده کافی است $\delta=\min\{1, \frac{\varepsilon}{10}\}$ در نظر بگیریم. آنگاه حد ثابت می‌شود.

تعریف (حدود مکرر): فرض کنید $f(x,y)$ تابعی دو متغیره و $P_0(x_0,y_0)$ نقطه‌ای در R^2 باشد هر یک از حدود زیر را حدود مکرر گویند

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_{12} \quad , \quad \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_{21}$$

مثال) اگر $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$، نشان دهید: الف) حد تابع در $(0,0)$ موجود نیست

ب) L_{12} و L_{21} را بیابید

حل: اگر در امتداد منحنی $y=mx^2$ که از مبدا مختصات می‌گذرد به مبدا نزدیک شویم داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx^2)}{x^4+m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

چون حد بالا به m بستگی دارد پس حد وجود ندارد.

$$L_{12} = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$L_{21} = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y^2}\right] = 0$$

تمرین) اگر $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$، نشان دهید که $L=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ موجود نیست ولی $L_{12}=L_{21}=0$، راهنمایی (در امتداد $y=\sqrt{x}$) بررسی و در امتداد $y=mx$ نیز بررسی کنید.

۲۲۵

نتایج مهم: ۱) اگر L_{12} و L_{21} موجود باشند آنگاه برابرند اما ممکن است L_{12} موجود نباشد.

۲) اگر L موجود باشد ممکن است L_{12} و L_{21} موجود نباشد

۳- تساوی $L_{21} = L_{12}$ وجود L را ایجاب نمی‌کند

۴- اگر L_{12} و L_{21} موجود بوده و $L_{21} \neq L_{12}$ آنگاه L مشتبه‌اند و موجود نمی‌باشد

۵) اگر L، L_{12}، L_{21} موجود باشند آنگاه $L = L_{21} = L_{12}$

پیوستگی: تابع $z = f(x,y)$ را که در $P_0(x_0,y_0)$ تعریف می‌باشد پیوسته گویند هرگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

مشتقات جزئی:

تعریف ۱: نمو جزئی تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ نسبت به x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

به همین ترتیب نمو جزئی z نسبت به y به صورت:

$$\Delta_y f = f(x, y+\Delta y)$$

تعریف ۲) مشتق جزئی تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ را نسبت به x یا y به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

در تعاریف بالا واضح است که وقتی مشتق f را نسبت به x می‌گیریم می‌بایست y را به عنوان عددی ثابت در نظر بگیریم و بالعکس.

همچنین:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f$$

تعریف ۳) مشتق جزئی تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ را که در نقطه $P_0(x_0,y_0)$ تعریف شده است نسبت به x به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

به طور مشابه

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta y} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

مثال) بر اساس تعریف، مشتقات جزئی تابع زیر را حساب کنید

$f(x,y)=x^2-3xy+y^2$

حل: $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)y+y^2-(x^2-3xy+y^2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-3y\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-3y)=2x-3y$

به طور مشابه:

$\frac{\partial f}{\partial y}=-3x+2y$

مثال) اگر $f(x,y)$ به صورت زیر تعریف شده باشد $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ را بیابید

$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ، اگر $(x,y)\neq(0,0)$ باشد آنگاه، و اگر $(x,y)=(0,0)$ آنگاه $f(x,y)=0$

حل: $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y-0}{y-0}=1$

تذکر: برای محاسبه مشتق جزئی، از قضایای مشتق‌گیری استفاده کنید

مثال) اگر $f(x,y)=x^2y-x\sin xy$ باشد مطلوبست $D_1f=\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}=D_2f$ و $D_2f(1,\pi)$

حل: $D_1f=\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-\sin xy-xy\cos xy$

$D_2f=\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-x^2\cos xy \qquad D_2f(1,\pi)=1^2-1^2\cdot\cos\pi=1+1=2$

تعریف: مشتقات جزئی با مراتب بالاتر: اگر $z=f(x,y)$ و f_x ، f_y مشتق‌پذیر باشند داریم:

$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad f_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

قضیه: اگر توابع $f(x,y)$ ، f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} در نقطه $P_0(x_0,y_0)$ تعریف شده، و در همسایگی این نقطه پیوسته باشند آنگاه:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

مثال) در تابع $f(x,y)=xy+\sqrt{x}$ ، نشان دهید $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

حل: $f_x=y+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، $f_y=x$ ، $f_{xy}=1$ ، $f_{yx}=1$

چون تابع f_x در نقطه $(0,0)$ تعریف نشده پس f_{yx} موجود نیست در حالیکه

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1$$

تعریف دیفرانسیل: اگر $f(x,y)$ تابعی دو متغیره از x و y و در نقطه‌ی (x,y) مشتق‌پذیر باشد دیفرانسیل تابع f را با df نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

نکته: دیفرانسیل تابع n متغیره $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ بصورت زیر بیان شود

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

تعریف: دیفرانسیل مرتبه‌ی بالاتر:

داریم ، $d=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

بنابراین : $d^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy$

تعریف: مشتقات جزئی: در رابطه $F(x,y,z)=0$ اگر z بطور ضمنی تابعی از x و y باشد آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

مثال) اگر $z=x^2\tan^{-1}(\frac{y}{x})-y^2\tan^{-1}(\frac{x}{y})$ ، نشان دهید $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

حل: $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\left[\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right](\frac{1}{x})-2y\tan^{-1}(\frac{x}{y})-y^2\left[\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\right]\cdot(\frac{-x}{y^2})$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-2y\tan^{-1}(\frac{x}{y}) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-2y\left[\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\right]\cdot(\frac{1}{y})=1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

مثال) اگر $u=x^{y}$ نشان دهید که $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

حل: $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}\longrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\cdot\ln x$ (1)

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y}\ln x\longrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\cdot\ln x+\frac{1}{x}x^{y}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}$ (2) $(1)=(2)$

تمرین) اگر $u=\frac{x^2+y^2}{x+y}$ باشد ثابت کنید $\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=4\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

تمرین) اگر $u=\ln(x^2+y^2)$ باشد ثابت کنید ... $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

تمرین) اگر $z=f(x+ay)+g(x-ay)$ باشد ثابت کنید: $\frac{\partial^2 z}{\partial y}=a^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

توجه $(f(u))'=u'\cdot f'(u)$

تعریف: (قاعده زنجیره‌ای). فرض کنید z تابعی از دو متغیر u و v و هر کدام از متغیرهای u و v هم تابعی از دو متغیر مانند x و y باشند در صورتیکه توابع فوق مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

مثال) اگر $z=u^2+v^2-2uv$ و $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$ باشد مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ را پیدا کنید.

حل: $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}$ داریم

$\frac{\partial z}{\partial r}=(2u-2v)\cdot(\cos\theta)+(2v-2u)\cdot(\sin\theta)=2r(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$

$=2r(1-2\sin\theta\cdot\cos\theta)$

تذکر: اگر z تابعی از دو متغیر x و y باشد که در آن x و y فقط تابعی از یک متغیر مانند t باشد در صورتیکه توابع فوق مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

مثال) اگر $f(x,y)=x^{y}+y^{x}$ که $x=\sin t$ و $y=\cos t$ مشتق f نسبت به t را بیابید

حل: $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(yx^{y-1}+y^{x}\ln x)(\cos t)+(x^{y}\ln x+xy^{x-1})(-\sin t)$

حال می‌توانیم مقادیر x و y را بجای آنها قرار دهیم

۲۶

توابع همگن : تابع $f(x,y)$ را همگن درجه n گوییم اگر به ازای هر $(x,y)\in D_f$ و هر عدد مثبت λ در دامنه که $(\lambda x,\lambda y)\in D_f$ باشد داشته باشیم

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

قضیه اویلر (Euler) : اگر تابع $f(x,y)$ همگن از درجه n باشد آنگاه :

$$\boxed{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial z}=n\,f(x,y)}$$

مثال) اگر $f(x,y)=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ باشد حاصل $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید.

حل : چون f همگن درجه صفر است (چرا؟) پس طبق اویلر

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0\times f(x,y)=0$$

مثال) اگر $u=\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}}}$ مطلوبست : $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=$

حل : چون u همگن از درجه $n=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ پس :

جواب $=\frac{1}{20}u$

مثال) اگر $u=x^n\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ باشد مطلوبست : $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=$

حل : u همگن از درجه n است پس طبق اویلر :

جواب $=nu$

مثال) اگر $u=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ باشد ~~مطلوبست~~ $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$

حل : u همگن از درجه صفر است پس طبق اویلر : $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ $\leftarrow$

$x\frac{\partial u}{\partial x}=-y\frac{\partial u}{\partial y}$ $\leftarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$

مثال) اگر $z=tg^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ باشد آنگاه $\frac{\partial y}{\partial x}$ را بیابید

حل :

$$z=tg^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\longrightarrow tg\,z=\frac{x-y}{x+y}\longrightarrow F=tg\,z-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)=0$$

(راهنمایی : از مشتق گیری ضمنی استفاده کنید)

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}==\frac{y}{x}$$

نکته مهم: در حل مسائلی که مختصات دکارتی و قطبی را بهم ارتباط میدهد نکات زیل را مورد نظر قرار میدهیم

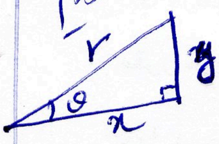
a) وقتی که x متغیر مستقل است، r و θ هر دو متغیرند و y ثابت می ماند یعنی $\frac{\partial y}{\partial x}=0$

b) وقتی که y متغیر مستقل است. r و θ هر دو متغیرند و x ثابت می ماند یعنی $\frac{\partial x}{\partial y}=0$

c) وقتی که θ متغیر مستقل است. x و y هر دو متغیرند و r ثابت می ماند یعنی $\frac{\partial r}{\partial \theta}=0$

d) وقتی که r متغیر مستقل است x و y هر دو متغیرند ولی θ ثابت می ماند یعنی $\frac{\partial \theta}{\partial r}=0$

الف) برای پیدا کردن $\frac{\partial r}{\partial x}$، ما باید یک رابطه بین r و x مستقل از θ بدست آوریم



میدانیم $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

$$\begin{cases} x^2=r^2\cos^2\theta \\ y^2=r^2\sin^2\theta \end{cases} \xrightarrow{+} \boxed{x^2+y^2=r^2}$$

رابطه مستقل از θ

با مشتق گیری نسبت به x داریم

$$2x=2r\frac{\partial r}{\partial x} \rightarrow (1)\ \boxed{\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}}$$

$$(2)\ \boxed{\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}}$$

همچنین $\boxed{(1)^2+(2)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1}$

ب) برای پیدا کردن $\frac{\partial x}{\partial r}$ ما باید یک رابطه بین r و x مستقل از y پیدا کنیم چنین رابطه ای عبارتست از $x=r\cos\theta$

$$x=r\cos\theta \rightarrow (3)\ \boxed{\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta=\frac{x}{r}}$$

از مقایسه (1) و (3) نتیجه میشود که:

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial r}}$$

ج) برای پیدا کردن $\frac{\partial x}{\partial \theta}$، ما باید یک رابطه بین x و θ مستقل از y پیدا کنیم چنین رابطه ای عبارتست از:

$$x=r\cos\theta \rightarrow \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta=-y \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial \theta}=-y}\ (4)$$

برای پیدا کردن $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ باید یک رابطه بین x و θ مستقل از r داشته باشیم

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\div} \tan\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ \text{یا}\ \boxed{\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2} \Rightarrow r^2\frac{\partial \theta}{\partial x}=-y=\frac{\partial x}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial \theta}=r^2\frac{\partial \theta}{\partial x}}$$

۲. $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\theta}$ بنا براین

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\xRightarrow{\text{مشتق میگیریم}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-y\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\quad (۵)$$

و از $\theta=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ داریم

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}\Longrightarrow\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\quad (۶)$$

از جمع دو رابطه ۵ و ۶ نتیجه میشود که:

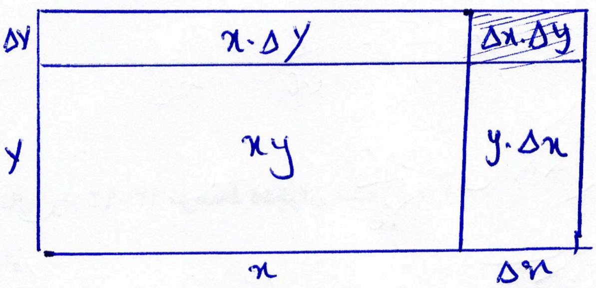
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$$

مثال) اگر $z=xy$ مطلوبست محاسبه dz و Δz و نمایش هندسی آنها

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=y\,dx+x\,dy$$

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y$$

$$\Delta z=x\,dy+y\,dx+dx\,dy$$



نشان میدهد که dz و Δz اختلاف شان

$dxdy=\Delta x\cdot\Delta y$ همان مساحت مستطیل

مثال) مساحت تقریبی مستطیل دارای ابعاد ۳۵/۰۲ و ۲۴/۹۷ واحد را حساب کنید

$A=xy \qquad x=35,\ dx=0.02 \qquad y=25 \qquad dy=-0.03$

$A=35\times25=875 \qquad dA=x\,dy+y\,dx=25(0.02)+35(-0.03)=-0.55$

مساحت تقریبی $=A+dA=874.45$

ماکسیمم و مینیمم توابع چند متغیره:

تعریف ۱ (ماکسیمم مطلق): تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در نقطه $(x_0,y_0)\in D_f$ دارای ماکسیمم مطلق است هرگاه

$$\forall (x,y)\in D_f\ ,\ (x,y)\neq(x_0,y_0) \Longrightarrow f(x_0,y_0)>f(x,y)$$

برای مینیمم مطلق جهت نامساوی بالا ($>$) عکس می‌شود.

تعریف ۲) اکسترمم نسبی: اگر تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در نقطه $(x_0,y_0)\in D_f$ و نقاط مجاور آن پیوسته باشد گوییم f در (x_0,y_0) ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد هرگاه به ازای جمیع مقادیر Δx و Δy همواره داشته باشیم

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)<0 \Longrightarrow \text{ماکسیمم نسبی}$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)>0 \longrightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای مانند M و مجاور آن پیوسته و دارای ماکسیمم مطلق (مینیمم مطلق) باشد نقطه‌ی M ماکسیمم (مینیمم) نسبی هم هست.

مثال) نشان دهید $f(x,y)=x^2+y^2+4$ در نقطه $(0,0)$ مینیمم دارد.

حل: $f(0+\Delta x, 0+\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2>0 \longrightarrow$ f مینیمم نسبی دارد

مقدار مینیمم تابع $f(0,0)=0^2+0^2+4=4$

قضیه: اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) و همسایگی آن پیوسته و دارای نقطه ماکسیمم یا مینیمم نسبی بوده و f_x و f_y وجود داشته باشد در این صورت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

نقطه بحرانی: نقطه $P_0(x_0,y_0)$ را نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ یا تابع f در نقطه $P_0\in D_f$ مشتق‌پذیر نباشد.

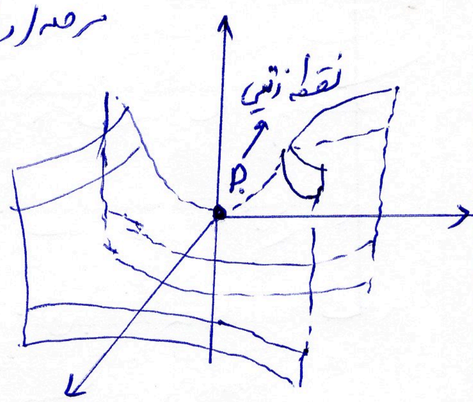
روش‌های محاسبه اکسترمم نسبی

روش اول: استفاده از تعریف

روش دوم: آزمون مشتق دوم

آزمون مشتق دوم:

$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow P_0(x_0,y_0)$ مرحله اول



$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=A$ مرحله دوم

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=C$ مرحله سوم

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=B$

مرحله پنجم: الف) اگر $AC-B^2>0$ و $A<0$ یا $(d^2z)_{p}<0$ آنگاه ماکسیمم نسبی

ب) اگر $AC-B^2>0$ و $A>0$ یا $(d^2z)_{p}>0$ آنگاه مینیمم نسبی

ج) اگر $AC-B^2=0$ آنگاه باید از توقف یا d^2z برای تعیین مینیمم و ماکسیمم نسبی کمک گرفت

د) اگر $AC-B^2<0$ یا $(d^2z)_{P_0}\gtrless 0$ باشد P_0 نقطه زینی است

"نقطه زینی با توجه به شکل بالا نقطه‌ای است که اگر در امتداد محور yها حرکت کنیم به صورت نقطه مینیمم و اگر در امتداد محور xها حرکت کنیم به صورت نقطه ماکسیمم به نظر می‌رسد"

روش سوم: استفاده از دترمینان‌های هیشن (Hessian)

$$d^2z=f_{x^2}dx^2+2f_{xy}\,dx\,dy+f_{y^2}dy^2=[dx\ \ dy]\begin{bmatrix} f_{x^2} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{y^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}$$

توجه کنید که (d^2z یک فرم درجه دوم است) که علامت d^2z آن بستگی به مشیرک‌های اصلی فرم درجه دوم d^2z دارد یعنی اگر ماتریس هیشن آن را در نقطه P_0 در نظر بگیریم

$$H_{P_0}=\begin{bmatrix} f_{x^2} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{y^2}\end{bmatrix}$$

مشیرهای اصلی آن عبارتند از: $|H_1|=f_{x^2}$ و

$$H_2=\begin{vmatrix} f_{x^2} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{y^2}\end{vmatrix}$$

۱- اگر $|H_1|<0$ و $|H_2|>0$ باشد یعنی $(d^2z)_{P_0}<0$ نیز برای تابع در نقطه P_0 ماکسیمم دارد

۲- اگر: $|H_1|>0$ و $|H_2|>0$ باشد یعنی $(d^2z)_{P_0}>0$ تابع در P_0 مینیمم دارد

۳- به جز موارد ۱ و ۲، نقطه P_0 زینی است.

تذکر: اگر $Z = f(x,y,z)$ ، ماتریس هسین آن در نقطه بحرانی P_0 بصورت زیر باشد

$$H_{P_0} = \begin{bmatrix} f_{x^2} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{y^2} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{z^2} \end{bmatrix}$$

که مینورهای اصلی آن عبارتند از:

$$|H_1| = f_{x^2} \quad , \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{x^2} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{y^2} \end{vmatrix} \quad و$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} f_{x^2} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{y^2} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{z^2} \end{vmatrix}$$

مثال) اکسترمم نسبی تابع $Z = x^2 - 4x + y^2 - 6y - 9$ را به روش‌های گفته شده بیابید

روش اول (تعریف)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 = 0 \qquad x = 2$$

$$\Rightarrow P_0 = (2,3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6 = 0 \qquad y = 3$$

$$Z(2+\Delta x, 3+\Delta y) - Z(2,3) = \left[(2+\Delta x)^2 - 4(2+\Delta x) + (3+\Delta y)^2 - 6(3+\Delta y) - 9\right] - (-22)$$

$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 0 \Rightarrow$ تابع Z در $(2,3)$ مینیمم نسبی دارد $\Rightarrow Z(2,3) = -22$ مقدار مینیمم

روش دوم (آزمون مشتق دوم)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 = A$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6 \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 = C \longrightarrow AC - B^2 = 4 - 0 = 4 > 0 \ , \ A = 2 > 0$$

پس z در $(2,3)$ مینیمم نسبی دارد.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

روش سوم (آزمون ماتریس هسین)

$|H_1| = f_{x^2} = 2 \ , \ |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow |H_1| > 0 , |H_2| > 0 \longrightarrow$ z در $(2,3)$ مینیمم دارد

مثال) ماهیت نقطه بحرانی تابع $f=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ را مشخص کنید

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1=0\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-x=0\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z-2=0 \Longrightarrow P_0=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$$

نقطه بحرانی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2$$

$$|H|=\begin{vmatrix} f_{x^2} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{yx} & f_{y^2} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{z^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\ ,\quad |H_1|=2>0$$

داریم $|H_1|=f_{x^2}$, $|H_2|=\begin{vmatrix} f_{x^2} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{y^2}\end{vmatrix}$

$$|H_2|=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3>0\qquad |H_3|=|H|=6>0$$

$\Rightarrow$ P_0 نقطه min نسبی

مثال) ماهیت نقطه بحرانی تابع $f=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ را مشخص کنید

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1-\frac{y}{x^2}=0\rightarrow y=x^2\quad (1)\qquad \xrightarrow{(1),(3)} x^2=\frac{z^2}{2}\rightarrow z^2=2x^2\quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}\rightarrow y^2=xz\quad (2)\qquad \xrightarrow{(1),(2)} x^4=xz\rightarrow x=0 \text{ غ ق ق}$$

$$z=x^3\quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{y}-\frac{2}{z^2}\Rightarrow y=\frac{z^2}{2}\quad (3)\qquad x^6=2x^2 \xleftarrow{(5),(4)}$$

$$y=\sqrt{2}\ ,\quad z=\sqrt[4]{8}\leftarrow x=\sqrt[4]{2}\leftarrow x^6=2x^2$$

$P_0\left(\sqrt[4]{2},\sqrt{2},\sqrt[4]{8}\right)$ نقطه بحرانی است

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}\xrightarrow{P_0}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\sqrt[4]{8}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2z}{y^3}\xrightarrow{P_0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sqrt[4]{2}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{4}{z^3}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}\xrightarrow{P_0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{x^2}\xrightarrow{P_0}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{y^2}\xrightarrow{P_0}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=-\frac{1}{y^2}\xrightarrow{P_0}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=-\frac{1}{2}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} \sqrt[4]{8} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt[3]{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0/4 + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$$

و $|H_1| = \sqrt[4]{8} > 0$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} \sqrt[4]{8} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$|H_3| = |H| > 0 \longrightarrow$ P_0 نقطه min نسبی است

مثال) ماهیت نقطه بحرانی تابع زیر را مشخص کنید:

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x(1-x-2y) = 0$ ① $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = y(1-2x-y) = 0$ ② $\xrightarrow{1,2} \boxed{x=y=0}$

$P_0(0,0)$

$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x=y=\frac{1}{3}}$ $P_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

همچنین نقاط $P_2(0,1)$ و $P_3(1,0)$ نیز بحرانی اند

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1-2x-2y$

اگر نقاط بحرانی فوق را یکی یکی بررسی کنیم داریم

$P_0(0,0)$ زینی $\quad P_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ماکسیمم نسبی $\quad P_2(0,1)$ زینی $\quad P_3(1,0)$ زینی

مثال) عدد ۱۲۰ را به سه قسمت طوری تقسیم کنید که مجموع حاصلضرب دو بدو آنها ماکسیمم شود

x, y و $120-(x+y)$ سه قسمت

$$S = xy + (x+y)(120-(x+y)) = 120x + 120y - x^2 - y^2 - xy$$

$\frac{\partial S}{\partial x} = 120 - 2x - y = 0$

$\frac{\partial S}{\partial y} = 120 - x - 2y = 0 \longrightarrow x = y = 40$

$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -2 = A \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -2 = C$

$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = -1 = B$

$AC - B^2 = 3, \ A < 0 \longrightarrow$ S در $(40,40)$ ماکسیمم دارد

$Max_S = (40)(40) + (40+40)(120-(40+40))$

$Max_S = 4800$

تمام

« مشتق گیری و انتگرال گیری از توابع برداری، گرادیان، دیورژانس و کرل »

تعریف: اگر بردار $\vec{a}$ وابسته به متغیر اسکالر (یا پارامتر) t باشد بطوریکه با تغییر t در بازه‌ای مانند (c, d) بردار $\vec{a}$ هم تغییر کند، آنگاه $\vec{a}$ را یک تابع برداری، وابسته به اسکالر t گویند و می‌نویسیم

$$\vec{a} = \vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \vec{a}(t)$$

که در آن $\vec{f}$ نمایانگر قانون بین $\vec{a}$ و t و $f_1(t)$، $f_2(t)$، $f_3(t)$ را مؤلفه‌های تابع برداری $\vec{f}(t)$ گویند.

مثال) معادله دایره را بنویسید $(f_1(t) = a\cos t,\ f_2(t) = a\sin t)$ (معادله برداری)

$$\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + (0)\vec{k}$$

(a ثابت و t پارامتر)

مثال) معادله برداری بیضی به معادله $(f_1(t) = a\sin t,\ f_2(t) = b\sin t)$ را بنویسید

$$\vec{r} = a\sin t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + (0)\vec{k}$$

توجه: حد، پیوستگی و مشتق توابع برداری زمانی وجود دارد که حد، پیوستگی و مشتق کلیه مؤلفه‌های توابع برداری وجود داشته باشد.

قواعد کلی مشتق گیری توابع برداری:

۱) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \dfrac{d}{dt}\vec{a} + \dfrac{d}{dt}\vec{b} - \dfrac{d}{dt}\vec{c}$

۲) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dfrac{d\vec{b}}{dt}$

۳) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dfrac{d\vec{b}}{dt}$

۴) $\dfrac{d}{dt}(k\vec{a}) = k\dfrac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\dfrac{dk}{dt}$ ($\vec{a}$ تابع برداری از پارامتر t و k تابع اسکالری از t هستند)

۵) $\vec{F} = f_1(x)\vec{i} + f_2(y)\vec{j} + f_3(z)\vec{k} \longrightarrow \dfrac{d\vec{f}}{dt} = \dfrac{df_1}{dt}\vec{i} + \dfrac{df_2}{dt}\vec{j} + \dfrac{df_3}{dt}\vec{k}$

مثال)

مثال) اگر $\vec{r}=(\cos\omega t)\vec{i}+(\sin\omega t)\vec{j}$ که در آن ω ثابت و t متغیر است
نشان دهید که:

$$1)\ \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega\vec{k} \qquad 2)\ \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=0$$

حل:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(-\omega\sin\omega t)\vec{i}+(\omega\cos\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\left[(\cos\omega t)\vec{i}+(\sin\omega t)\vec{j}\right]\times\left[(-\omega\sin\omega t)\vec{i}+(\omega\cos\omega t)\vec{j}\right]$$

$$=-\omega\cos\omega t\times\sin\omega t\,\cancel{(\vec{i}\times\vec{i})}+\omega\cos^2\omega t(\vec{i}\times\vec{j})-\omega\sin^2\omega t(\vec{j}\times\vec{i})+$$

$$\omega\sin\omega t\cos\omega t\,\cancel{(\vec{j}\times\vec{j})}=\omega\cos^2\omega t\,\vec{k}-\omega\sin^2\omega t(-\vec{k})$$

$$=\omega k(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)=\omega k$$

$$r\cdot\frac{dr}{dt}=\left[(\cos\omega t)\vec{i}+(\sin\omega t)\vec{j}\right]\cdot\left[-\omega\sin\omega t\,\vec{i}+\omega\cos\omega t\,\vec{j}\right]$$

$$=-\omega\sin\omega t\cdot\cos\omega t+\omega\sin\omega t\cos\omega t=0$$

ضرب داخلی = جمع حاصلضرب مولفه دربردارها است.

مثال) مطلوبست مشتق $\left(\vec{r}\cdot\frac{dr}{dt}\right)$:

میدانیم

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\frac{db}{dt}+\frac{da}{dt}\cdot\vec{b}$$

پس

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\frac{dr}{dt}\right)=\vec{r}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}=\vec{r}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

مثال) اگر $\vec{f}(t)=5t^2\vec{i}+t\vec{j}-t^3\vec{k}$ و $g(t)=\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}$ باشد مطلوبست محاسبه

الف) $\frac{d}{dt}(\vec{f}\cdot\vec{g})$ ب) $\frac{d}{dt}(\vec{f}\times\vec{g})$

حل:

الف: $\vec{f}\cdot\vec{g}=5t^2\sin t-t\cos t\Rightarrow\frac{d}{dt}(\vec{f}\cdot\vec{g})=10t\sin t+5t^2\cos t-\cos t+t\sin t$

ب)

$$\vec{f}\times\vec{g}=\begin{vmatrix}i & j & \vec{k}\\ 5t^2 & t & -t^3\\ \sin t & -\cos t & 0\end{vmatrix}=-t^3\cos t\,\vec{i}-t^3\sin t\,\vec{j}-(5t^2\cos t+t\sin t)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}\times\vec{g})=-(3t^2\cos t-t^3\sin t)\vec{i}-(3t^2\sin t+t^3\cos t)\vec{j}-(10t\cos t-5t^2\sin t+\sin t+t\cos t)\vec{k}$$

مثال) مطلوبست مشتق:

الف) $\frac{d}{dt}\left[(\cos t\, i + \sin t\, j)\, e^{2t}\right]$

ب) $\frac{d}{dt}\left[(\sin^{-1} t\, \vec{i} + \cos^{-1} t\, \vec{j}) \cdot (tg^{-1} t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j})\right]$

حل $\ldots = \frac{d}{dt}\left[\sin^{-1} t \cdot tg^{-1} t + \cos^{-1} t \cdot \cos t\right] = \frac{tg^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\sin^{-1} t}{1+t^2} - \frac{\cos t}{\sqrt{1-t^2}} - \sin t \cos^{-1} t$

تعریف بردار سرعت: فرض کنید ذره‌ای روی منحنی C به معادله‌ی $\vec{R}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ در حرکت باشد در صورت وجود $f_1'(t)$، $f_2'(t)$ و $f_3'(t)$، سرعت لحظه‌ای ذره در زمان t را با نماد $\vec{v}(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف میشود.

$$\vec{v}(t) = \vec{R}'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}$$

و تندی سرعت یا اندازه سرعت عبارتست از:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2}$$

تعریف شتاب لحظه‌ای: شتاب لحظه‌ای ذره‌ای که دارای سرعت برداری $\vec{v}(t)$ باشد را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = f_1''(t)\vec{i} + f_2''(t)\vec{j} + f_3''(t)\vec{k}$$

مثال) ذره‌ای روی منحنی دایره‌ای شکل به معادله $\vec{R} = \cos t^2 \vec{i} + \sin t^2 \vec{j}$ در حرکت است مطلوبست $\vec{v}(t)$ و $\vec{a}(t)$

$$\vec{v}(t) = (-\sin t^2)(2t)\vec{i} + (\cos t^2)(2t)\vec{j} \quad \text{و}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \left[(-\cos t^2)(2t)^2 - 2\sin t^2\right]\vec{i} + \left[(-\sin t^2)(2t)^2 + 2\cos t^2\right]\vec{j}$$

مثال) ذره‌ی متحرکی دارای تابع مکانی بصورت $\vec{r} = \cos\omega t\, \vec{i} + \sin\omega t\, \vec{j}$ می‌باشد که در آن ω ثابت است. نشان دهید که بردار سرعت بر بردار $\vec{r}$ عمود است و شتاب دارای جهت به سمت مبدأ است و اندازه شتاب متناسب با فاصله از مبدا مختصات می‌باشد.

حل: $\vec{r} = \cos\omega t\, \vec{i} + \sin\omega t\, \vec{j} \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega \sin\omega t\, \vec{i} + \omega\cos\omega t\, \vec{j}$

شرط عمود بودن دو بردار آنست که حاصلضرب داخلی آنها صفر شود

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (\cos\omega t\, \vec{i} + \sin\omega t\, \vec{j}) \cdot (-\omega\sin\omega t\, \vec{i} + \omega\cos\omega t\, \vec{j}) = 0 \longrightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$$

ش: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r} \Rightarrow$ اندازه بردار شتاب متناسب با $|\vec{r}|$ و جهتش به سمت مبدا

انتگرال گیری از توابع برداری : اگر $\vec{a}$ و $\vec{f}$ دو تابع برداری برحسب t باشند بطوریکه $\frac{d\vec{f}}{dt}=\vec{a}$ آنگاه

$$\int \vec{a}\cdot dt=\vec{f}+c$$

فرمول های انتگرال گیری از توابع برداری

۱) میدانیم
$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}$$
پس
$$\int\left(\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}\right)dt=\vec{a}\cdot\vec{b}+c$$

۲) داریم
$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=a\times\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}$$
پس
$$\int\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}\right)dt=\vec{a}\times\vec{b}+c$$

۳) داریم
$$\frac{d}{dt}(\vec{r})^{2}=2r\cdot\frac{dr}{dt}$$
پس
$$\int\left(2r\cdot\frac{dt}{dt}\right)dt=\vec{r}^{2}+c$$

۴) داریم
$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2}\right]=2\,\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^{2}\vec{r}}{dt^{2}}$$
پس
$$\int\left(2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^{2}r}{dt^{2}}\right)dt=\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2}+c$$

۵) اگر $\vec{a}$ بردار ثابت باشد داریم
$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}\cdot\frac{dr}{dt}$$
پس
$$\int\left(\vec{a}\cdot\frac{dr}{dt}\right)dt=\vec{a}\cdot\vec{r}+c \quad \text{و} \quad \int(\vec{a}\times\vec{r})dt=\vec{a}\times\vec{r}+c$$

۶) داریم
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\times\frac{d^{2}r}{dt^{2}}=0+\vec{r}\times\frac{d^{2}r}{dt^{2}}=\vec{r}\times\frac{d^{2}r}{dt^{2}}$$
پس
$$\int\left(\vec{r}\times\frac{d^{2}r}{dt^{2}}\right)dt=\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+c$$

مثال) از توابع زیر انتگرال بگیرید

$$1)\ \frac{d^2 r}{dt^2} = -n^2 \vec{r}$$

طرفین تساوی را در $2\frac{d\vec{r}}{dt}$ ضرب کنید

حل: $$2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = -2n^2 r\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$\int\left(2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right)dt = \int\left(-2n^2\cdot r\frac{dr}{dt}\right)dt \xrightarrow[\text{فرمول ④}]{\text{فرمول ③}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -n^2\vec{r}^2 + c$$

$$2)\ \vec{a}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{b} \Rightarrow \int\left(\vec{a}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt = \int \vec{b}\,dt \xrightarrow{\text{طبق فرمول ⑤}}$$

$$\vec{a}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b}t + c \xrightarrow{\text{مجدداً انتگرال}} \int\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt = \int(\vec{b}t + c)dt \xrightarrow{\text{طبق}}$$

$$\vec{a}\times\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{b}t^2 + ct + d$$

مثال) $\vec{r}$ را از معادله $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}t + \vec{b}$ حساب کنید

$$\int\frac{d^2r}{dt^2}\cdot dt = \int(\vec{a}t + \vec{b})dt \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{b}t + c \xrightarrow{\text{مجدداً انتگرال}}$$

$$\int\left(\frac{dr}{dt}\right)dt = \int\left(\frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{b}t + c\right)dt \Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{a}t^3}{6} + \frac{\vec{b}t^2}{2} + \vec{c}t + d$$

مثال) اگر $r(t) = 5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}$ ثابت کنید

$$\int_1^2 \vec{r}\times\frac{d^2r}{dt^2}\,dt = -14\vec{i} + 75\vec{j} - 15\vec{k}$$

حل: داریم $$\int\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = (5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k})\times(10t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k})$$

$$= -2t^3\vec{i} + 5t^4\vec{j} - 5t^2\vec{k}$$

$$\int_1^2\left(r\times\frac{d^2r}{dt^2}\right)dt = \left[-2t^3\vec{i} + 5t^4\vec{j} - 5t^2\vec{k}\right]_1^2 = -14\vec{i} + 75\vec{j} - 15\vec{k}$$

مثال) اگر $\vec{r}(t) = \begin{cases} 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, & t=2 \\ 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, & t=3 \end{cases}$ نشان دهید

$$\int_2^3\left(\vec{r}\cdot\frac{dr}{dt}\right)dt = 10$$

حل: وقتی $t=2$: $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = \left(\sqrt{4+1+4}\right)^2 = 9$ اما

$$\int_2^3\left(r\cdot\frac{dr}{dt}\right)dt = \tfrac{1}{2}r^2\Big]_2^3$$

وقتی $t=3$: $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = \left(\sqrt{16+4+9}\right)^2 = 29$

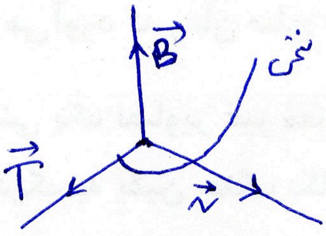
$$= \tfrac{1}{2}(29-9) = 10$$

بردار قائم یکانی دوم: بردار قائم یکانی دوم در هر نقطه از یک منحنی در فضا را به صورت زیر تعریف می کنیم ۴۰

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

توجه: $|\vec{B}| = |\vec{T}||\vec{N}|\sin\frac{\pi}{2} = 1$

بردار $\vec{B}$ عمود بر $\vec{N}$ و $\vec{T}$ است



مثال

بردار قائم یکانی اول و دوم بر منحنی C به معادله ی $\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ را به ازای $t = \frac{\pi}{3}$ به دست آورید

$$\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{R}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k} \rightarrow |\vec{R}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \Rightarrow \sqrt{2}$$

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right) = \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{\vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$T'(t) = \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\vec{j} + 0$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \qquad |T'(t)| = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\sin^2 t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

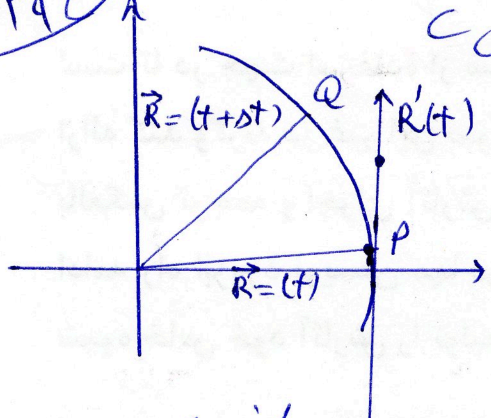
$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{\pi}{3}} \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}\right)$$

طول قوس منحنی: اگر $\vec{R}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ معادله منحنی C باشد بطوریکه f_1 و f_2 و f_3 در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند آنگاه طول قوس منحنی C وقتی که $a < t < b$ به صورت زیر تعریف می شود

$$S = \int_a^b |\vec{R}'(t)|\,dt$$

بردار انحناء: اگر $\vec{T}(t)$ بردار واحد مماس بر منحنی C در نقطه P و s طول قوس باشد که از یک نقطه انتخابی روی منحنی C تا نقطه P اندازه گرفته شود بطوریکه با ازدیاد T زیاد شود در این صورت بردار انحنا منحنی C در نقطه P تعریف می شود:

$$\vec{K}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$$



بردار یکانی مماس: فرض کنید تابع برداری $\vec R(t)$ نمایانگر منحنی c باشد در اینصورت بردار یکانی مماس بر منحنی c در نقطهٔ p را با نماد $T(t)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(t)=\frac{R'(t)}{|R'(t)|}$$

توجه: بردار $\vec T(t)$ هم جهت با $\vec R'(t)$ است.

مثال) اگر $\vec R(t)=e^t\cos 2t\,\vec i+e^t\sin 2t\,\vec j+e^t\vec k$ مطلوبست محاسبه بردار یکانی مماس $t=0$

حل: $\vec R'(t)=(e^t\cos 2t\,\vec i-2e^t\sin 2t\,\vec i)+(e^t\sin 2t\,\vec j+2e^t\cos 2t\,\vec j)+e^t\vec k$

$R'(0)=\vec i+3\vec j+\vec k$

$$|R'(0)|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}\Rightarrow T(0)=\frac{R'(0)}{|R(0)|}=\frac{\vec i+3\vec j+\vec k}{\sqrt{11}}$$

بردار قائم یکانی اول: اگر $\vec R(t)$ بردار منحنی c باشد آنگاه بردار قائم اول (واحد قائم) را با $\vec N(t)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\vec N(t)=\frac{\vec T'(t)}{|T'(t)|}$$

$\vec N(t)$ هم جهت با $T'(t)$ است.

مثال) بردار قائم اول تابع زیر را بیابید

$\vec R(t)=a\cos t\,\vec i+a\sin t\,\vec j$

حل: $R'(t)=-a\sin t\,i+a\cos t\,\vec j\to|R'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=a$

$$|R'(t)|=a\Rightarrow T(t)=\frac{1}{a}(-a\sin t\,i+a\cos t\,j)=-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j$$

$$T'(t)=-\cos t\,\vec i-\sin t\,\vec j\to|T'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$$

$$\vec N(t)=\frac{T'(t)}{|T(t)|}=\frac{-\cos t\,\vec i-\sin t\,\vec j}{1}=-(\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j)$$

ملاحظه کنید که بردار $\vec N(t)$ برداریست واحد و عمود بر $T(t)$ زیرا:

$\vec N(t)\cdot\vec T(t)=\sin t\cos t-\sin t\cos t=0$ (شرط عمود بودن دو بردار آنست که ضرب داخلی آنها صفر شود)

توجه: $|\vec{K}(t)|$ را خم یا انحناء منحنی در نقطه P نامند و با نماد ρ نشان میدهیم و همچنین

$$R = \frac{1}{|\vec{K}(t)|}$$ شعاع انحنا

مثال: اگر معادله پارامتری C بصورت $x = a\cos t$ و $y = a\sin t$ (معادله پارامتری دایره) داده شده باشد مطلوبست بردار خم انحناء و شعاع خم منحنی C در یک نقطه دلخواه.

$$\vec{R}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} \longrightarrow R'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}$$

$$|R'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = a$$

$$T(t) = \frac{\vec{R'}(t)}{|\vec{R'}(t)|} = \frac{1}{a}(-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}) = -\sin t\,i + \cos t\,j$$

$$T'(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} \Longrightarrow K(t) = \frac{T'(t)}{|\vec{R'}(t)|} = \frac{1}{a}(-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j})$$

$\rho = |\vec{K}(t)|$ خم یا انحنای منحنی $= \frac{1}{a} \Longrightarrow$ شعاع خم $= \frac{1}{|\vec{K}(t)|} = a$

نابلا: عملگر برداری ∇ (نابلا یا دل) را تعریف میکنیم

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{K}\frac{\partial}{\partial z}$$

گرادیان: گرادیان تابع غیر برداری ϕ را که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد با نماد $\nabla\phi$ نشان داده و تعریف میکنیم

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{K}$$

دیورژانس تابع برداری: دیورژانس تابع برداری

$$\vec{F} = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{K}$$

را درصورت وجود f_1'، f_2' و f_3' تعریف میکنیم

$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{K}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{K}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

چرخه یا کرل (Curl) . کرل تابع برداری $\vec{F}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

مثال) گرادیان ϕ را بیابید که در آن $\phi=x^2ye^z$

حل: $\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

گرادیان $\nabla\phi=(2xye^z)\vec{i}+(x^2e^z)\vec{j}+(x^2ye^z)\vec{k}$

مثال) مطلوب است محاسبه گرادیان تابع

$$f=\sin(xy)+\sin(yz)+\sin(xz)$$

$$\nabla f=[y\cos(xy)+z\cos(xz)]\vec{i}+[x\cos(xy)+z\cos(yz)]\vec{j}+[y\cos(yz)+x\cos(xz)]\vec{k}$$

مثال: اگر $\phi=\frac{1}{r}$ و $r^2=x^2+y^2+z^2$ مطلوب $\nabla\phi$ که در آن $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $r=|\vec{r}|$ می‌باشند.

حل: طبق قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

اما چون $r^2=x^2+y^2+z^2$ پس از دو طرف برحسب x مشتق بگیرید داریم

$$2r\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=2x\longrightarrow\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\longrightarrow$$ به همین ترتیب. $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ و $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$

پس $\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\cdot\phi$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}=-\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)i+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right]$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{r}i+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right]=-\frac{1}{r^3}(xi+y\vec{j}+z\vec{k})=\boxed{-\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}}$$

مثال) مشتق جهتی تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$ را در نقطه $(1,0,0)$ و در جهت گرادیان تابع f پیدا کنید

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \longrightarrow \vec{a} = \frac{\nabla \vec{f}}{|\nabla f|} = \frac{2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \overset{\text{در نقطه } (1,0,0)}{=} i$$

$$Df_{\vec{a}} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{a} = (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot i = +2x + 2y(\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{0}) + 2z(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{i}}_{0})$$

$$Df_{\vec{a}} = 2x \xrightarrow{x=1} Df_{\vec{a}} = 2$$

مثال) مشتق تابع $z = Ln(x^2+y^2)$ را در نقطه $P(3,4)$ و در امتداد گرادیان تابع در نقطه مذکور حساب کنید

$$\nabla z = \frac{2x}{x^2+y^2}i + \frac{2y}{x^2+y^2}\vec{j} \Rightarrow \nabla z \overset{(3,4)}{=} \frac{6}{25}i + \frac{8}{25}\vec{j}$$

بنابراین داریم

$$Df_{\vec{a}} = \nabla z \cdot \vec{a} = \nabla z \cdot \frac{\nabla \vec{z}}{|\nabla z|} = \frac{|\nabla z|^2}{|\nabla z|} = |\nabla z| \cdot a = \frac{\nabla \vec{z}}{|\nabla z|}$$

$$Df_{\vec{a}} = \sqrt{\frac{36}{(25)^2} + \frac{64}{(25)^2}} = \sqrt{\frac{100}{(25)^2}} = \frac{10}{25} = 2/5$$

مثال) مشتق جهتی تابع $F = 3x^2 + 2y - 3z^2$ را در نقطه $P(1,1,1)$ و در امتداد بردار $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ پیدا کنید

$$\vec{a} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \longrightarrow \nabla f = 6x\vec{i} + 2\vec{j} - 6z\vec{k} \overset{(1,1,1)}{=} 6i + 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$Df_{\vec{a}} = \nabla f \cdot \vec{a} = (6\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \underset{(\text{ضرب داخلی})}{=} \frac{1}{3}(12 + 4 + 3) = \frac{19}{3}$$

مثال: مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)$ را در جهت مثبت محورهای x و y و z پیدا کنید

حل: میدانیم که $\vec{i}$ بردار واحد در جهت مثبت محور x است بنابراین

$$Df_{\vec{i}} = \nabla f \cdot \vec{i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot i = \frac{\partial f}{\partial x}$$

بهمین ترتیب

$$Df_{\vec{j}} = \nabla f \cdot \vec{j} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{و} \quad Df_{\vec{k}} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

مشتقات جهت دار (سویی): میدانیم که $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial z}$ میزان تغییرات تابع f را در راستای (به ترتیب) محور x ، y و z نشان میدهند

حال اگر بخواهیم میزان تغییرات تابع f را در امتداد برداری مانند $\vec{b}$ به دست آوریم

امتداد برداری که هم جهت با $\vec{b}$ را به دست می‌آوریم $\left(\vec{a}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ سپس $\nabla f\cdot\vec{a}$ را حساب می‌کنیم و آن را با نماد $Df_{\vec{a}}$ نمایش میدهیم که به $Df_{\vec{a}}$ بردار سویی تابع f در جهت بردار $\vec{b}$ گویند.

بنابراین، اگر $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ باشد

$$\vec{a}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{b_1}{|b|}\vec{i}+\frac{b_2}{|b|}\vec{j}+\frac{b_3}{|b|}\vec{k}$$

$$\vec{a}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\boxed{Df_{a}=\nabla f\cdot\vec{a}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma}$$

اگر $b=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ باشد آنگاه

$$\vec{a}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$$

حال $\cos\beta=\sin\alpha$ آنگاه

$$\vec{a}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\boxed{Df_{a}=\nabla f\cdot\vec{a}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha}$$

مثال: مشتق جهت دار تابع با ضابطه $f(x,y)=e^{-xy}$ را در نقطه $(1,-1)$ و در امتداد $\theta=\frac{2\pi}{3}$ بدست آورید

$$\vec{a}=\cos\frac{2\pi}{3}\vec{i}+\sin\frac{2\pi}{3}\vec{j}=-\frac{\vec{i}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=-ye^{-xy}\vec{i}-xe^{-xy}\vec{j}$$

$$Df_{\vec{a}}=\nabla f\cdot\vec{a}=(-ye^{-xy})(-\tfrac{1}{2})+(-xe^{-xy})(\tfrac{\sqrt{3}}{2})\Big|_{(1,-1)}=-\frac{e}{2}(1+\sqrt{3})$$

مثال) اگر $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} - 3yz^2\vec{k}$ ، پیدا کنید $\nabla\cdot\vec{F}$ را در نقطه $(1,-1,1)$

۴۳

حل:
$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-3yz^2)\right)\vec{k}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = y^2 + 2x^2 - 6yz \Rightarrow \nabla\cdot\vec{F}(1,-1,1) = 1+2+6 = 9$$

مثال) محاسبه کنید $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right)$$

توجه: قبلاً داشتیم $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ، ...

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$= \frac{r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} + \frac{r - y\frac{\partial r}{\partial y}}{r^2} + \frac{r - z\frac{\partial r}{\partial z}}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left[\left(r - \frac{x^2}{r}\right) + \left(r - \frac{y^2}{r}\right) + \left(r - \frac{z^2}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(3r - \frac{1}{r}(x^2+y^2+z^2)\right) = \frac{1}{r^2}\left(3r - \frac{1}{r}\cdot r^2\right) = \frac{1}{r^2}(\cancel{3r - r}) = \frac{2r}{r^2} = \frac{2}{r}$$

مثال) اگر $\vec{F} = \nabla(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ ، پیدا کنید $\nabla\times\vec{F}$

حل:
$$\nabla(x^3+y^3+z^3-3xyz) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3+z^3-3xyz) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3+z^3-3xyz) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$= \vec{i}(3x^2-3yz) + \vec{j}(3y^2-3xz) + \vec{k}(3z^2-3xy)$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2-3yz & 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \end{vmatrix} = i(\cancel{-3x+3x}) - \vec{j}(\cancel{-3y+3y}) + \vec{k}(\cancel{-3z+3z}) = 0$$

اتحادهای مهم:

1) $\nabla\times\nabla f = 0$

2) $\nabla\cdot(\nabla f) = 0 = \nabla^2 f$

3) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$

4) $\nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$

ماکسیمم مقدار مشتق جهتی تابع f :

میدانیم $Df_{\vec a} = \nabla f\cdot \vec a = |\nabla f||\vec a|\cos\theta$ (ضرب داخلی دو بردار)

$\max(Df_{\vec a}) = |\nabla f|$ (وقتی $\theta=0$ ، $\cos\theta=1$ هم‌جهت $|\vec a|=1$ بردار داده)

نتیجه) ~~در جهتی تابع f~~ : به عبارت دیگر مشتق جهتی تابع f وقتی ماکسیمم است که در راستای گرادیان تابع باشد و ماکزیمم مقدار آن $|\nabla f|$ است

مثال) در چه جهتی از نقطه $(3,1,-2)$ مشتق سوی تابع $f=x^2y^2z^4$ ماکسیمم است. مقدار max مقدار ∇ را بیابید

حل: $\nabla = 2xy^2z^4\vec i + 2x^2yz^4\vec j + 4x^2y^2z^3\vec k$

$$\nabla f(3,1,-2) = 96\vec i + 288\vec j - 288\vec k$$

مشتق سوی وقتی max است که در امتداد ∇f باشد مقدار ماکزیمم برابر $|\nabla f|$ است

$$|\nabla f| = \sqrt{(96)^2+(288)^2+(-288)^2} = 96\sqrt{19}$$

مثال) دمای نقاط در فضا به وسیله $T(x,y,z)=x^2+y^2-z$ داده شده است. یک پشه که در نقطه $(1,1,2)$ قرار گرفته، آرزو دارد در جهتی پرواز کند که با سرعت زیاد گرم شود، در چه جهتی باید پرواز کند.

$$\nabla T = 2x\vec i + 2y\vec j - \vec k \rightarrow \nabla T(1,1,2) = 2\vec i + 2\vec j - \vec k$$

پس اگر پشه در امتداد بردار $\nabla T=(2,1,-1)$ پرواز کند در حداقل زمان گرم میشود.

مثال) جهتی از نقطه $(1,2)$ را بیابید که در آن مقدار تابع $f(x,y)=e^{2y}\tan^{-1}\left(\frac{y}{3x}\right)$ تغییر نکند.

حل: $\nabla f = -\frac{3ye^{2y}}{9x^2+y^2}\vec i + e^{2y}\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{3x}\right) + \frac{3x}{9x^2+y^2}\right)\vec j$

$$\nabla f(1,2) = -\frac{1}{2}e^4\vec i + \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\vec j$$

اگر مقدار تابع تغییر نکند باید $\nabla f\cdot\vec a=0$. فرض کنید $\vec a=\cos\theta\vec i+\sin\theta\vec j$ باشد

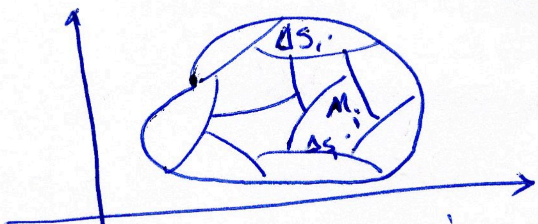
$$\nabla f\cdot\vec a = -\frac{1}{2}e^4\cos\theta + \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\sin\theta = 0 \rightarrow \tan\theta = \frac{2}{\pi+2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi+2}\right)$$

انتگرال دوگانه

فرض کنید تابع $f(x,y)$ در ناحیه بسته D پیوسته باشد. ناحیه D را به n سطح جزئی با مساحت های $\Delta S_1 , \Delta S_2 , \dots , \Delta S_n$ تقسیم می‌کنیم. درون هر سطح جزئی ΔS_i و یا روی کناره آن نقطه $M_i(t_i , z_i)$ را بطور دلخواه انتخاب می‌کنیم حاصل جمع $\sum_{n} f(t_i , z_i)\cdot \Delta S_i =$ را تشکیل می‌دهیم. اگر:

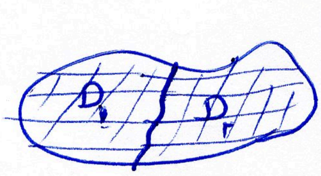
$$\lim_{(\Delta S_i \text{ قطر}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i , z_i)\cdot \Delta S_i = \iint_D f(x,y)\,ds$$

را انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)$ در ناحیه D گویند.

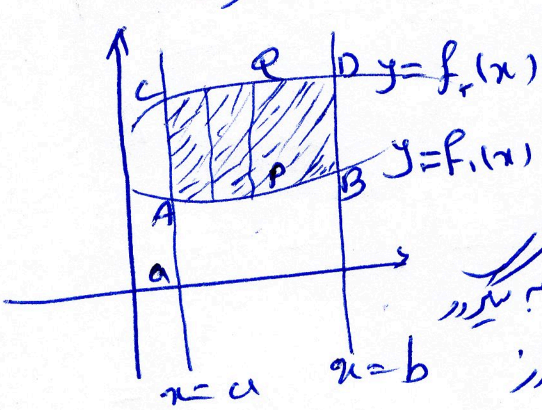


قضیه: اگر تابع $f(x,y)$ در ناحیه بسته D که از دو ناحیه D_1 و D_2 تشکیل شده، پیوسته باشد و D_1 و D_2 شامل پاره سطحی مشترک نباشند آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \iint_{D_1} f(x,y)\,ds + \iint_{D_2} f(x,y)\,ds$$



انتگرال های مکرر: ① فرض کنید ناحیه D به خم های $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ و خطوط $x=a$ ، $x=b$ محدود شده باشد. PQ یک نوار باریک با عرض ds است آنگاه:

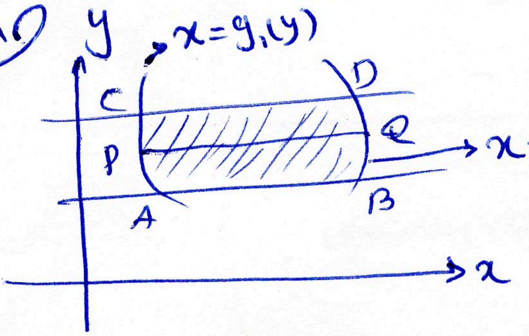


$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_a^b \left[\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

توجه شود که انتگرال درونی به مفهوم آنست که انتگرال در راستای یک ضلع نوار PQ از P تا Q (x را ثابت) محاسبه می‌گردد ما دامیکه انتگرال بیرونی متناظر با لغزیدن این ضلع از AC تا BD است.

② وقتی که x تابعی از y، بین $y=c$ و $y=d$ ثابت باشد تابع انتگرال که ابتدا نسبت به x (با فرض y ثابت) بین حدود x_1 و x_2 انتگرال‌گیری محدود بین از

از حاصل نسبت به y انتگرال میگیریم



$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\left[\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

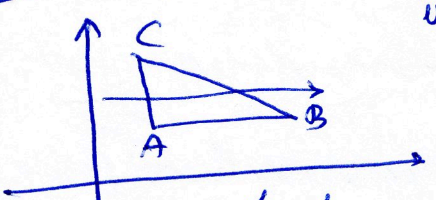
③ اگر ناحیه انتگرال‌گیری به وسیله خطوط $x=a$ ، $x=b$ و $y=c$ ، $y=d$ محدود شده باشد در صورت پیوسته بودن تابع $f(x,y)$ در درون و کناره ناحیه فوق آنگاه .

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال) انتگرال $I=\int_0^5\int_0^{x^2} x(x^2+y^2)\,dy\,dx$ را بیابید.

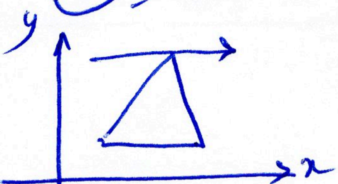
$$I=\int_0^5\left(x\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big]_0^{x^2}\right)dx=\int_0^5\left(x^5+\frac{x^7}{3}\right)dx=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\right)_0^5=18880/2$$

تعریف ①: ناحیه منظم، ناحیه R در صفحه xy را نسبت به محور xها منظم یا ساده گویند اگر هر خطی موازی محور xها رسم کنیم و از داخل ناحیه انتگرال‌گیری بگذرد مرز آن ناحیه را در بیشتر از دو نقطه قطع نکند (شکل).



تعریف ②: ناحیه R در صفحه xy را نسبت به محور xها منظم یا ساده گویند اگر از نقاط تلاقی خطوط مرزی ناحیه انتگرال‌گیری خطوطی به موازات محور xها رسم کنیم هیچ کدام از درون ناحیه انتگرال‌گیری نگذرد.

تعریف ③: ناحیه R در صفحه xy را نسبت به محور xها منظم یا ساده گویند هرگاه از معادلات مرزی x را بر حسب y حساب کنیم فقط دو رابطه حاصل شود.



توجه: به طور مشابه می‌توان ناحیه منظم یا ساده را نسبت به محور yها تعریف کرد.

نحوه استفاده از ناحیه‌ی منظم، غیرمنظم و ترتیب نوشتن حدود انتگرال‌ها

۱) اگر ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به هر دو محور منظم باشد، حدود انتگرال‌ها را نسبت به هر کدام از متغیرها بنویسید، مشکلی پیش نمی‌آید

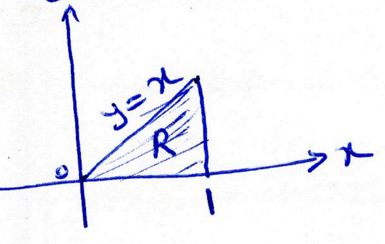
۲) اگر ناحیه انتگرال‌گیری فقط نسبت به یکی از محورهای مختصات نامنظم باشد حدود انتگرال (از چپ به راست) را به آن متغیری اختصاص دهید که ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به آن منظم است

۳) ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به رویه‌ی انتگرال حتماً باید منظم باشد

۴) اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به محورهای مختصات نامنظم باشد ابتدا ناحیه را با رسم خطوطی به موازات محورهای مختصات از نقاط تلاقی خطوط مرزی، به نواحی منظم نسبت به یکی از محورها تقسیم کنید. در ناحیه انتگرال‌گیری سعی کنید که تعداد نواحی کمتری حاصل شود

۵) گاهی اوقات تابع زیر انتگرال‌ها طوری است که ترتیب خاصی را می‌طلبد

مثال) انتگرال دوگانه $\iint_R e^{\frac{y}{x}}\,ds$ را بیابید که ناحیه R مثلث محدود به خطوط $y=x$، $y=0$ و $x=1$ است.



$$\iint_R e^{\frac{y}{x}}\,ds=\int_0^1\left[\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy\right]dx=\int_0^1\left[x e^{\frac{y}{x}}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1 x(e-1)\,dx=(e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}$$

توجه: چون $e^{\frac{y}{x}}$ نسبت به x قابل انتگرال‌گیری نیست بنابراین بند (۵) ابتدا انتگرال‌گیری را نسبت به y انجام داده‌ام.

نکته: اگر انتگرال‌های مکرر $I_1=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ و $I_2=\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$ موجود و برابر باشند آنگاه گویند انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ موجود و برابر با مقدار $I_1=I_2$ است.

۵۰

مثال نشان دهید که انتگرال های مکرر تابع $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ در ناحیه $0\le y\le 1$ و $0\le x\le 1$: D محدود اما انتگرال دوگانه تابع f محدود نمی باشد

$$I_1=\int_0^1\int_0^1\frac{(x-y)}{(x+y)^3}\,dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{-x}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+y)}\right]_0^1 dx=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{x+1}\Big|_0^1=\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}$$

$I_1\neq I_2 \Longrightarrow$ انتگرال دوگانه وجود ندارد

$$I_2=\int_0^1\int_0^1\frac{(x-y)}{(x+y)^3}\,dx\,dy=\int_0^1\left[\frac{y}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x+y)}\right]dy=-\frac{1}{2}$$

مثال) انتگرال های دوگانه زیر را حساب کنید

الف)
$$\int_3^4\int_1^2\frac{dy\,dx}{(x+y)^2}=\int_3^4\left[-\frac{1}{x+y}\right]_1^2 dx=\int_3^4\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[-\mathrm{Ln}(x+2)+\mathrm{Ln}(x+1)\Big]_3^4=\mathrm{Ln}\,\frac{25}{24}$$

ب)
$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\big[x(-\cos y)\big]_0^x dx=\int_0^{\pi}-x\cos x\,dx+\int_0^{\pi}\cos 0\,dx$$

$$\int_0^{\pi}x-x\cos x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-(x\sin x+\cos x)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}+2$$

ج)
$$\int_0^a\int_{\frac{x}{a}}^{x}\frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^a x\left[\frac{1}{x}\,tg^{-1}\frac{y}{x}\right]_{\frac{x}{a}}^{x}dx=\int_0^a\underbrace{\left[tg^{-1}1-tg^{-1}\frac{1}{a}\right]}_{\text{عدد ثابت}}dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-tg^{-1}\frac{1}{a}\right)x\Big]_0^a=a\left(\frac{\pi}{4}-tg^{-1}\frac{1}{a}\right)$$

د) $\displaystyle\int_0^a\int_{y-a}^{2y} xy\,dx\,dy = \int_0^a \left[y\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{y-a}^{2y} dy = \int_0^a \frac{y}{2}\left(4y^2-(y-a)^2\right)dy$

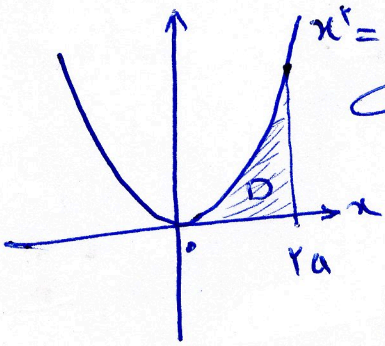
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^a (3y^3+2ay^2-a^2y)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}y^4+\frac{2}{3}ay^3-\frac{a^2}{2}y^2\right]_0^a = \frac{11}{24}a^4$

ه) $\displaystyle\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_1^{\ln 8}\left[e^{x+y}\right]_0^{\ln y} dy = \int_1^{\ln 8}\left(e^{y+\ln y}-e^{y}\right)dy$

$\displaystyle = \int_1^{\ln 8}\left(ye^{y}-e^{y}\right)dy = ye^{y}-e^{y}-e^{y}\Big]_1^{\ln 8} = 8(3\ln 2-2)+e$

تبصره: $e^{\ln y}=y$ ،

مثال) انتگرال دوگانه $\iint_D xy\,dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محدود به محور x ها و $x=2a$ و $x^2=4ay$ است.



حل: ناحیه D نسبت به هر دو محور مختصات منظم است.

$\displaystyle\iint_D xy\,dA = \int_0^{2a}\int_0^{x^2/4a} xy\,dy\,dx = \int_0^{2a}\left[x\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{x^2/4a} dx$

$\displaystyle = \frac{1}{32a^2}\int_0^{2a} x^5\,dx = \frac{1}{32a^2}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^{2a} = \frac{1}{32a^2}\cdot\frac{64a^6}{6} = \frac{1}{3}a^4$

یا: $\displaystyle\iint_D xy\,dA = \int_0^a\int_0^{\sqrt{4ay}} xy\,dx\,dy = \int_0^a\left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^{\sqrt{4ay}} dy = \int_0^a (2ay^2)\,dy$

$\displaystyle = \frac{2}{3}ay^3\Big]_0^a = \frac{2}{3}a^4$

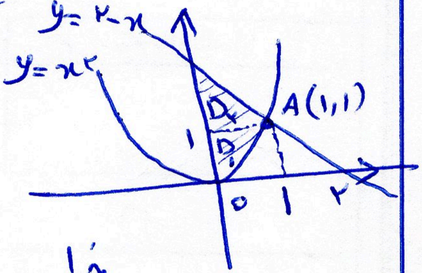
تغییر ترتیب انتگرال گیری: در انتگرال گیری دوگانه با حدود متغیر، تغییر ترتیب انتگرال باعث تغییر حدود انتگرال گیری میشود. برای انجام چنین کاری گاهی اوقات این کار نیاز به چند تقسیم ناحیه انتگرال گیری و نوشتن انتگرال داده شده به صورت مجموع چند انتگرال دوگانه با حدود تغییر یافته، صورت می پذیرد) هم چنین گاهی اوقات تغییر ترتیب انتگرال گیری باعث آسان شدن محاسبه انتگرال گیری میشود

مثال) ناحیه انتگرال گیری رسم، ترتیب انتگرال گیری عوض شود و مقدار انتگرال را محاسبه کنید

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{2-x} xy\,dy\,dx$$

حل: ناحیه انتگرال گیری عبارت است:

$x^2\le y\le 2-x$ و $0\le x\le 1$



حال اگر بخواهیم ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم، چون ناحیه نسبت به محور xها نامنظم است. بنابراین انتگرال گیری را با رسم خطی به موازات محور xها به دو زیر ناحیه منظم نسبت به محور xها تقسیم میکنیم

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{2-x} xy\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^{2-y} xy\,dx\,dy$$

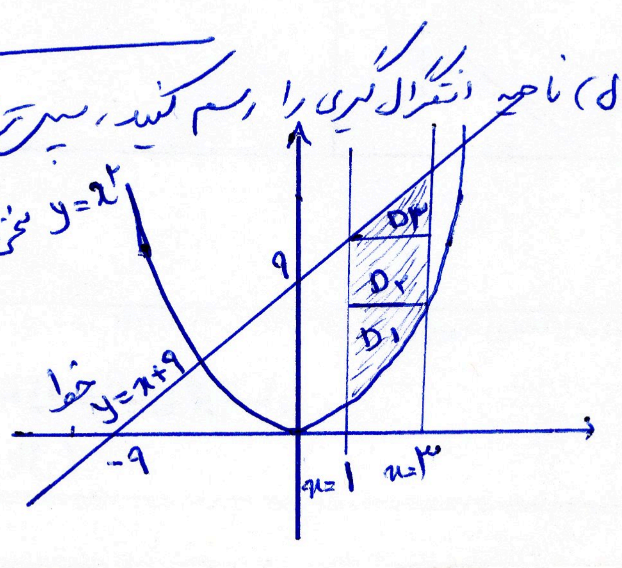
$$=\int_0^1\left[y\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{y}}dy+\int_1^2\left[y\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{2-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,dy+\frac{1}{2}\int_1^2 y(2-y)^2\,dy$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{3}{8}$$

مثال) ناحیه انتگرال گیری را رسم کنید، سپس ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید.

$$I=\int_1^3\int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy\,dx$$

$1\le x\le 3,\quad x^2\le y\le x+9$



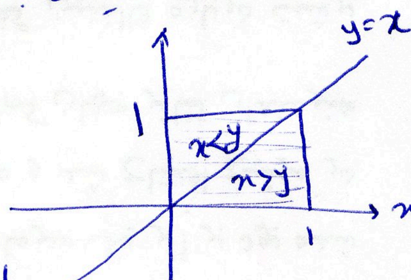
ناحیه D که به وسیله منحنی های $x^2 \le y \le x+9$ و $1 \le x \le 3$ محدود میشود اگر بخواهید ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید چون حدود دومین انتگرال باید برحسب x باشد و ناحیه انتگرال گیری نسبت به آن نامتقارن است باید ابتدا ناحیه D را از محل تلاقی خطوط مرزی با رسم خطوطی به موازات محور x که به سه زیرناحیه منظم نسبت به x تبدیل کنید

$$I=\int_1^3\int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy\,dx=\underbrace{\int_1^9\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy}_{D_1}+\underbrace{\int_9^{10}\int_1^{3} f(x,y)\,dx\,dy}_{D_2}+\underbrace{\int_{10}^{12}\int_{y-9}^{3} f(x,y)\,dx\,dy}_{D_3}$$

مثال) انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dy\,dx$$

ناحیه را که یک مربع است به دو زیرناحیه توسط خط $y=x$ تقسیم بندی می کنیم



$$\int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dy\,dx=\int_0^1\int_x^1 -(x-y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^x (x-y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\left(\frac{y^2}{2}-xy\right)\right]_x^1 dx+\int_0^1\left[\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^x dx=\int_0^1\left(\frac12-x+\frac{x^2}{2}\right)dx+\frac12\int_0^1 x^2\,dx$$

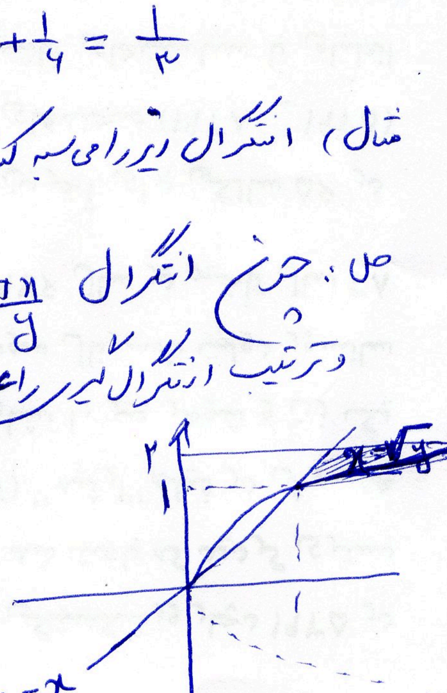
$$=\frac12 x-\frac12 x^2+\frac{x^3}{6}\Big|_0^1+\frac16 x^3\Big|_0^1=\left(\frac12-\frac12+\frac16\right)+\frac16=\frac13$$

مثال) انتگرال زیر را حساب کنید

$$I=\iint_R \sin\frac{\pi x}{2y}\,dA$$ که در آن

$R:\ y^2=x,\ y=2,\ y=1,\ x=y$

حل: چون انتگرال $\sin\frac{\pi x}{y}$ را نمیتوان برحسب y گرفت بنابراین ناحیه انتگرال گیری را رسم و ترتیب انتگرال گیری را عوض میکنیم.



$$I=\int_1^2\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\,dx\,dy=\int_1^2\left(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\right)_y^{y^2}dy$$

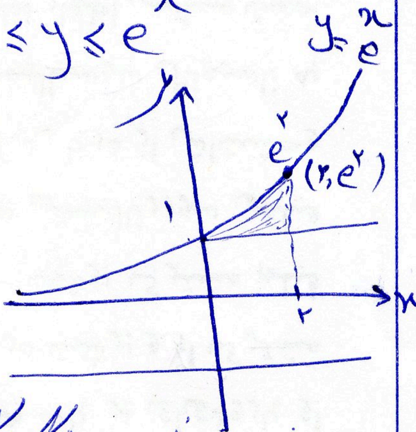
$$=\int_1^2 -\frac{2y}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}y-\cos\frac{\pi}{2}\right]dy=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\,dy$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}y\sin\frac{\pi}{2}y+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}y\right]_1^2=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

مثال) ناحیه انتگرال گیری را رسم کنید سپس ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید

$$I=\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^{x}} f(x,y)\,dy\,dx \qquad D:\ 0\le x\le 2\ ,\ 1\le y\le e^{x}$$

$$J=\int_{1}^{e^{2}}\int_{\ln y}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$



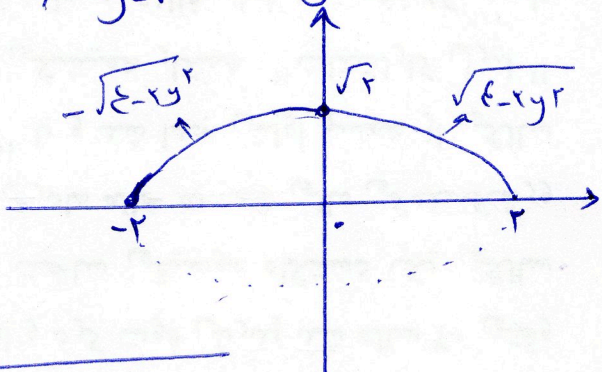
مثال) ناحیه انتگرال گیری را رسم، ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید

$$I=\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^{2}}}^{\sqrt{4-2y^{2}}} f(x,y)\,dx\,dy$$

حل: $D:\ 0\le y\le \sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{4-2y^{2}}\le x\le \sqrt{4-2y^{2}}$

یعنی $y=0$ ، $y=\sqrt{2}$ ، $x=\sqrt{4-2y^{2}} \rightarrow x^{2}+2y^{2}=4$ یعنی

$$\rightarrow y^{2}=\frac{4-x^{2}}{2}\rightarrow y=\sqrt{\frac{4-x^{2}}{2}}$$



پس $J=\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{\frac{4-x^{2}}{2}}} f(x,y)\,dy\,dx$

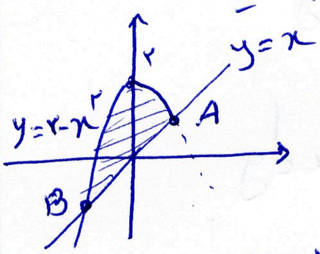
کاربردهای انتگرال دوگانه:

الف) محاسبه مساحت: اگر انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)$ را در ناحیه D حساب کنیم همان مساحت ناحیه D است.

$$S=\iint_D = \iint_D dx\,dy$$

مثال) مساحت ناحیه محدود به خط $y=x$ و منحنی $y=2-x^2$ را حساب کنید

حل: ناحیه را رسم می‌کنیم محل تلاقی دو منحنی را تعیین می‌کنیم

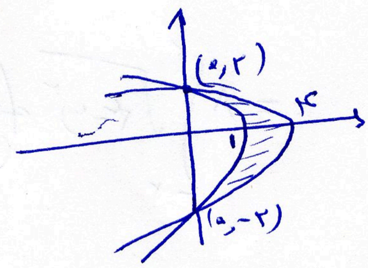


$$\begin{cases} y=2-x^2\\ y=x\end{cases} \longrightarrow 2-x^2=x \longrightarrow A\begin{vmatrix}x=1\\y=1\end{vmatrix} \text{ و } B\begin{vmatrix}x=-2\\y=-2\end{vmatrix}$$

$$f=2-x^2-x$$

$$S=\int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2} dy\,dx = \int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx = \left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{27}{6}$$

مثال) مساحت محصور شده توسط منحنی‌های $y^2=4-x$ و $y^2=4-4x$ را حساب کنید



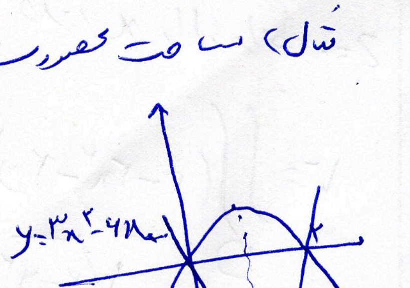
$$\begin{cases} y^2=4-4x\\ y^2=4-x\end{cases} \longrightarrow x=0,\ y=\pm 2$$

$$\begin{cases} x=1-\frac{y^2}{4}\\ x=4-y^2\end{cases}$$

$$S=2\int_0^2\int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx\,dy = 2\int_0^2\left[(4-y^2)-\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\right]dy$$

$$=6\int_0^2\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)dy = 6\left(y-\frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^2 = 8$$

مثال) مساحت محصور شده بین دو منحنی $y=2x-x^2$ و $y=3x^2-6x$ را بیابید



$$\begin{cases} y=3x^2-6x\\ y=2x-x^2\end{cases} \Longrightarrow x=0,\ x=2$$

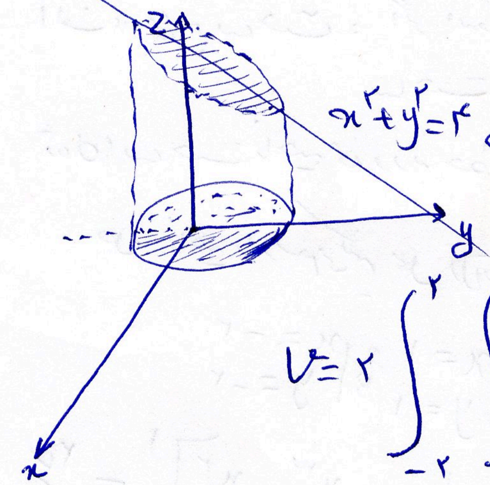
$$S=\iint_R dA = \int_0^2\int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 (8x-4x^2)\,dx =$$

$$4x^2-\frac{4}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

ب) محاسبه حجم: حجم جسم محصور به سطوح $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ روی ناحیه D به صورت $V=\iint_D |f(x,y)-g(x,y)|\,dx\,dy$ است که D تصویر جسم روی صفحه xy می‌باشد.

۵۶

مثال) حجم جسم حاصل از استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ و صفحات $y+z=4$ و $z=0$ را پیدا کنید.



حل: از شکل واضح است که $z=4-y$ باید روی دایره‌ی $x^2+y^2=4$ در صفحه‌ی xy انتگرال‌گیری شود.

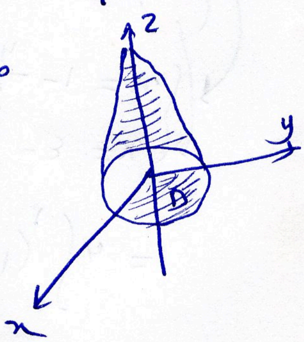
$$V=2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} z\,dx\,dy=2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2}(4-y)\,dx\,dy$$

$$=2\int_{-2}^{2}(4-y)\sqrt{4-y^2}\,dy=2\int_{-2}^{2}4\sqrt{4-y^2}\,dy-2\int_{-2}^{2}y\sqrt{4-y^2}\,dy$$

تابع فرد پس انتگرال صفر است

$$=8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy-0=8\left[\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)\right]_{-2}^{2}=16\pi$$

مثال) حجم محصور بین سطوح $z=4-2x^2-2y^2$ و صفحه xoy (یعنی $z=0$) را بیابید.



حل: ابتدا $z=0$ قرار دهید. رابطه بین x و y منحنی حاصل است که با ید آن انتگرال‌گیری شود. اگر بخواهید نسبت به y انتگرال بگیرید ابتدا x را مساوی صفر قرار دهید و حدود y را بیابید. آنگاه حدود x را از رابطه $z=0$ برحسب y محاسبه کنید.

$$z=0$$
$$4-2x^2-2y^2=0 \quad x^2+y^2=2$$
$$x=0 \quad y=\pm 2$$
$$x=\pm\sqrt{2-y^2}$$

$$V=\iint_D(4-2x^2-2y^2-0)\,dx\,dy$$

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}(4-2x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\left[4x-\frac{2}{3}x^3-xy^2\right]_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[\left[4\sqrt{2-y^2}-\frac{2}{3}(2-y^2)\sqrt{2-y^2}-y^2\sqrt{2-y^2}\right]-\left[-4\sqrt{2-y^2}-\frac{2}{3}(2-y^2)\sqrt{2-y^2}-y^2\sqrt{2-y^2}\right]\right]dy$$

$$=\int_{-2}^{2}8\sqrt{2-y^2}\,dy=2\times 8\int_{0}^{2}\sqrt{2-y^2}\,dy=16\left[\frac{y\sqrt{2-y^2}}{2}+\frac{2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}}\right]_{0}^{2}=4\pi$$